TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Betrachtung der BMT-Gleichung mit Termen höherer Ordnung sowie Untersuchung von Einflüssen der LAD-Gleichung und der Synchrotronstrahlung im Kontext der experimentellen Messung des anomalen magnetischen Moments des Myons

Bachelorarbeit
zur Erlangung des Hochschulgrades
Bachelor of Science
im Bachelor-Studiengang Physik

vorgelegt von

Christoph Krpoun
geboren am 05.07.1990 in Goslar

Institut für Kern- und Teilchenphysik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden
Mai 2014

Eingereicht am 28.05.2014

1. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger
2. Gutachter: Prof. Dr. Arno Straessner

Kurzdarstellung

Heutzutage steht das magnetische Moment des Myons unter physikalischer Beobachtung. Grund dafür ist eine signifikante Abweichung zwischen theoretischen und experimentellen Werten, das so genannte anomale magnetische Moment. Im Zusammenhang mit dieser Unstimmigkeit ist noch ein weiteres ungelöstes Problem der heutigen Physik zu nennen. Der Protonenradius liefert paradoxe Messergebnisse wenn dieser mit einem Myon anstatt eines Elektrons vermessen wird. Viele Physiker sehen deshalb als Lösung eine Erweiterung des heutzutage anerkannten Standardmodells der Teilchenphysik (SM), wenn nicht eine ganz neue Physik.
Diese Arbeit beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen der experimentellen Messung des magnetischen Momentes. Dabei wird näher auf die Bargmann-Michel-Telegdi-Gleichung (BMT-Gleichung) eingegangen. Desweiteren diskutiert sie Einflüsse ultrarelativistischer und quantenmechanischer Abstrahlungseffekte des Myons.

Abstract

Nowadays the magnetic moment of the muon is an interesting observable in modern physics. The reason for that is a significant discrepancy between theory and experiment of the so-called anomalous magnetic moment. In context with that exists a second unsolved problem the proton radius. This radius has different experimental values if measured with a muon instead of an electron. Because of that most physicists think about an expansion of the standard modell of particle physics (SM), or even more a whole new physical theory, these days.
This thesis deals with the theoretical mathematics of the measurement of the magnetic momentum. Doing that the focus is on the Bargmann-Michel-Telegdi-equation (BMT-equation). Furthermore it attends to effects of ultrarelativistic and quantum mechanical radiation effects.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Derzeit erklärt das Standardmodell (SM), eine relativistische Quantenfeldtheorie (QFT), einen Großteil der Grundbausteine der Materie. Dabei beschreibt es den kompletten bis heute beobachteten Teilchenzoo und bis auf die Gravitation alle Wechselwirkungen . Die Teilchen werden in zwei Oberkategorien – Leptonen und Quarks – sowie in drei übergreifende Familien gegliedert. Die gesammte stabile Materie des Universums besteht aus Teilchen der ersten Familie (Elektronen, Up-Quark, Down-Quark). Diese Ausarbeitung hingegen befasst sich mit einem Teilchen aus der zweiten Familie der Leptonen – dem Myon.
Die Wechselwirkungen des SM werden mittels Feldern beschrieben, die durch Bosonen dargestellt werden. Dabei unterscheidet man zwischen elektromagnetischer Wechselwirkung, schwacher Wechselwirkung und starker Wechselwirkung – Die ersten beiden Wechselwirkungen (WW) werden in der elektroschwachen WW zusammengefasst. Die Grundlagen dieser WW sind Eichtransformationen. Dabei werden Gruppen von Transformationen der Felder untersucht, welche die Dynamik der Teilchen invariant lassen. Die Symmetriegruppe der elektroschwachen WW lautet $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sowie die der QCD $SU(3)_C$.
Der Grund dafür, dass das Myon im Mittelpunkt dieser Arbeit steht, ist, dass es seit geraumer Zeit Physikern Fragen unbeantwortet lässt. Eine der Unstimmigkeiten, mit der sich diese Studie beschäftigt, ist das anomale magnetische Moment des Myons. Das vorliegende Problem besteht darin, dass zwischen theoretischer Vorhersage und experimentell bestimmtem Messwert eine Diskrepanz von mehr als 3σ liegt [1]. Dies deutet an, dass in der theoretischen Betrachtung noch nicht alle Einflüsse berücksichtigt worden sind. Viele Physiker sind auch der Meinung, dass ein derart großer Unterschied nicht mehr mit der bekannten Physik des SM korrigiert werden kann [1]. Somit ist diese Messung einer der strengsten zu bestehenden Tests für das bekannte SM heute.
In dieser Problembearbeitung geht es um die theoretische Beschreibung magnetischer Präzession bewegter Teilchen. Die daraus resultierende Bewegungsgleichung bildet die Grundlage für die experimentelle Bestimmung des magnetischen Moments. Dabei wird überprüft, ob in den damaligen Herleitungen – vor über 55 Jahren [2] – Fehler gemacht worden sind, welche ihrerseits Einflüsse auf die heutigen Abweichungen haben könnten. Dabei wird die BMT-Gleichung, einer lorentz-kovarianten Darstellung einer relativistischen Bewegungsgleichung eines Spins in homogenen äußeren Feldern untersucht. Damit sollen, wenn nötig, Erweiterungen diskutiert und quantifiziert werden. Weiterhin befasst sich diese Arbeit mit relativistischen Abstrahlungseffekten bewegter Ladungen. Dabei geht es zum einen um die Synchrotronstrahlung bewegter Ladungen und zum anderen um eine ultrarelativistische Betrachtung durch die

Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung (LAD-Gleichung)[1]. Hierbei wird untersucht, ob bisher nicht betrachtete Abstrahlungseffekte einen signifikanten Beitrag zur Abweichung von Experiment und Theorie liefern.
Um ein besseres Verständnis der zugrunde liegenden Formalismen zu gewährleisten, befasst sich der erste Abschnitt dieser Arbeit mit theoretischen Grundlagen der Relativistik mit Fokus auf der Lorentz-Transformation und Thomas-Präzession. Im dritten Kapitel werden das Experiment und dessen Ergebnisse erläutert. In Abschnitt Vier wird die BMT-Gleichung besprochen und eigene erarbeitete Extraterme werden diskutiert. Das fünfte Kapitel behandelt relativistische Abstrahlungseffekte und deren Einflüsse. Im letzten Abschnitt folgt ein Resümee und Vergleich aller Korrekturen zum aktuellen Messwert. Im Anhang werden Erläuterungen zu Formalismen, Definitionen und Konventionen gegeben.

[1] Wobei die LAD-Gleichung nur in einer Entwicklung betrachtet wird, der Landau-Lifshitz-Gleichung.

2 Grundlagen

2.1 Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie wurde von Albert Einstein 1905 [3] aufgestellt und verwirft die theoretische Annahmen einer absoluten Zeit und eines absoluten Raums. Die Theorie basiert auf zwei Postulaten [4]:

- 1. Postulat: Alle physikalischen Experimente sowie Resultate von Experimenten sind in allen gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegten Systemen gleich.
- 2. Postulat: Die Lichtgeschwindigkeit hat zu jeder Zeit und an allen Orten im Vakuum den konstanten Wert c und ist des Weiteren nicht von der Bewegung der Quelle abhängig.

Mit diesen Voraussetzungen muss eine Transformation definiert werden, die im nichtrelativistischen Grenzfall in die Galilei-Transformation übergeht [4].

2.2 Lorentz-Transformation

Explizit lässt sich eine Lorentz-Transformation Λ wie folgt darstellen [5]:

$$\Lambda = e^{B}, \tag{2.1}$$

wobei B, genau wie Λ, eine 4×4 Matrix sein muss. Da in dieser Ausarbeitung nur eigentliche Lorentz-Tranzformationen betrachtet werden[2], sind bestimmte Bedingungen an B durch Λ vorgegeben:

$$\text{1. Bed:} \quad \det\Lambda = 1 \Rightarrow \det\Lambda = \det(e^{B}) = e^{Tr(B)} \Rightarrow Tr(B) = 0 \quad \text{Spurfrei} \tag{2.2}$$

$$\text{2. Bed:} \quad g\Lambda^{T} g = \Lambda^{-1} \Rightarrow gB^{T}g = -B \Rightarrow (gB)^{T} = -gB \quad \text{antisymmetrisch} \tag{2.3}$$

Die Größe g ist gleich dem metrischen Tensor nach der Definition in (B.3) und der hochgestellte Index T steht für die Transposition der Matrix. Die letzte Eigenschaft bestimmt die Zahl der frei wählbaren Parameter von B. Da Λ eine 4×4 Matrix ist existieren 16 Gleichungen. Durch die Symmetrie von g existieren 10 linear abhängige

[2] Es gibt auch uneigentliche Lorentz-Transformationen mit $\det\Lambda = -1$. Dies liegt an der indefiniten Metrik der Raum-Zeit. Zum Verständnis: Vergleich räumliche Spiegelungen mit Spiegelungen in Raum und Zeit.

Gleichungen und reduzieren damit die Anzahl der freien Parameter auf sechs.
Somit ergibt sich folgende Gestalt für B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{01} & 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{02} & -B_{12} & 0 & B_{23} \\ B_{03} & -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Dabei beschreiben die erste Spalte und Zeile den eigentlichen Lorentz-Boost. Die übrige 3×3 Matrix stellt eine räumliche Drehung im Inertialsystem dar. Allgemein werden die sechs freien Parameter der Matrix durch sechs Fundamentalmatrizen widergespiegelt. Diese sind K_1, K_2 und K_3 für den reinen Boost und S_1, S_2 und S_3 für die Rotation. Die kompletten Formen der Matrizen sind in (A.3) zu sehen.
Für den allgemeinsten Fall einer beliebigen Bewegung $\vec{v}$ zweier Inertialsysteme – Σ_1 und Σ_2 – zueinander, mit nicht gleichbleibenden Achsen, ist die Form von Λ [5]:

$$\Lambda(\beta)^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda(\beta)_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Die Parameter β und γ sind definiert als:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \text{wobei:} \qquad \beta = |\vec{\beta}| \qquad \text{und:} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.6}$$

Somit transformiert eine Größe x_μ zwischen zwei Inertialsystemen Σ_1 und Σ_2 wie folgt:

$$x'_\mu = \Lambda(\vec{\beta})_{\mu}{}^{\nu} x_\nu \tag{2.7}$$

2.3 Thomas-Präzession

Die Thomas-Präzession beschreibt einen kinematischen Effekt der daraus resultiert, dass Lorentz-Transformationen nicht vertauschbar sind. Diese wurde 1927 von L. H. Thomas [6] bei der Erklärung der Diskrepanz zwischen theoretischer Vorhersage und Messung der Feinstrukturaufspaltung verwendet. Dabei ging er von einem empirischen Eigendrehimpuls der Teilchen aus. Die vollständige Erklärung wurde später durch die relativistische Elektronentheorie von Dirac geliefert [5]. Die folgende Formel beschreibt das Resultat von Thomas. Dabei ist $\vec{G}$ ein beliebiger Vektor und

ω_T die entstehende Winkelgeschwindigkeit der Drehung:

$$\text{Thomas-Präzession:} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{Raum} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{Körper} + \vec{\omega_T} \times \vec{G} \tag{2.8}$$

Relativistische Ursache der Thomas-Präzession

Die folgende Herleitung wurde mit Hilfe der Vorlage aus der Literatur [5] selbst berechnet. Dem Effekt liegt die Beschleunigung des beobachteten Objekts – zum Beispiel eines Elektrons oder Myons – zugrunde. Dabei betrachtet man zunächst das Myon aus dem Inertialsystem Labor (LS). Vom LS aus bewegt es sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Das Ruhesystem (RS) des Myons wird als eine mitbewegte Abfolge von Inertialsystemen definiert. Dabei hat es bei der Zeit t die Geschwindigkeit $c\vec{\beta}$ und bei $t + \delta t$ die Geschwindigkeit $c(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})$. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten in LS und RS ist durch die eingeführten Lorentz-Transformation aus Kapitel 2.2 gegeben. Dabei werden nur reine Boosts ohne Drehung verwendet[3]:

$$x' = \Lambda(\vec{\beta})x \quad \text{und des Weiteren:} \quad x'' = \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})x \tag{2.9}$$

Nun ist jedoch von Interesse, wie sich die Koordinaten der Ruhesystemen als Funktion der Zeit verhalten, denn dadurch wird der Einfluss der Beschleunigung auf das System charakterisiert. Dies ist durch eine Betrachtung der Transformation von x'' zu x' möglich. Mit Gleichung (2.9) ergibt sich:

$$x'' = \Lambda_S x' \tag{2.10}$$

$$\Lambda_S = \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})\Lambda(\vec{\beta})^{-1} = \Lambda(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta})\Lambda(-\vec{\beta}) \tag{2.11}$$

Zur weiterführenden Rechnung müssen den Geschwindigkeitsvektoren bestimmte Richtungen zugewiesen werden, die frei wählbar sind. In der Rechnung sind $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_x$ sowie $\delta\vec{\beta} = \delta\beta_1\vec{e}_x + \delta\beta_2\vec{e}_y$ gewählt. Des Weiteren sind nur Terme erster Ordnung in $\delta\vec{\beta}$ berücksichtigt. Für die explizite Rechung der Matrixmultiplikation wird auf die Referenz [5] verwiesen. Demnach folgt

$$\Lambda_S = \mathbb{1} - \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\right)\left(\vec{\beta} \times \delta\vec{\beta}\right) \cdot \mathbf{S} - \left(\gamma^2\delta\vec{\beta}_{\parallel} + \gamma\delta\vec{\beta}_{\perp}\right) \cdot \mathbf{K}, \tag{2.12}$$

wobei $\mathbf{K}$ und $\mathbf{S}$ die Fundamentalmatrizen der Lorentz-Transformation (A.3) sind.

[3] Die Indizes an Lorentz-Matrizen und Vierervektoren sind in den folgenden Formeln weggelassen worden, um eine bessere Übersicht zu gewährleisten. Beim Nachrechnen beachte Summenkonvention und Metrik.

Die Indizes $\parallel$ und $\perp$ beschreiben Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{\beta}$
Die Gleichung (2.12) ist in erster Ordnung von $\delta\vec{\beta}$ gleich:

$$\Lambda_S = \Lambda(\Delta\vec{\beta})R(\Delta\vec{\Omega}) \tag{2.13}$$

$$\text{Mit:} \quad \Lambda(\Delta\vec{\beta}) = \mathbb{1} - \Delta\vec{\beta}\cdot\mathbf{K} \quad \text{und:} \quad R(\Delta\vec{\Omega}) = \mathbb{1} - \Delta\vec{\Omega}\cdot\mathbf{S}$$

$$\text{Außerdem:} \quad \Delta\vec{\beta} = \gamma^2\delta\vec{\beta}_\parallel + \gamma\delta\vec{\beta}_\perp \quad \text{und:} \quad \Delta\vec{\Omega} = \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right)\left(\vec{\beta}\times\delta\vec{\beta}\right) \tag{2.14}$$

Das Ergebnis ist interessant, da obwohl am Anfang nur von einem reinen Boost $\Lambda(\vec{\beta}+\delta\vec{\beta})$ ausgegangen worde, dieser, wie in Gleichung (2.13) und (2.9) zu sehen, gleich einem Boost und einer infinitesimalen Drehung ist. Wenn jedoch nichtrelativisitsche Bewegungsgleichungen betrachtet werden, sind diese gültig, wenn ihre zeitliche Entwicklung des RS nur mit infinitesimalen Boosts – ohne Drehung – beschrieben werden kann [5]. Wird dieser Fall betrachtet, folgt:

$$x''' = \Lambda(\Delta\vec{\beta})x' \tag{2.15}$$

$$x''' = R(-\Delta\vec{\Omega})\Lambda(\vec{\beta}+\delta\vec{\beta})x \tag{2.16}$$

Somit ist das RS x''' gegenüber dem bewegten LS um den Winkel $-\Delta\vec{\Omega}$ gedreht. Daraus folgt, dass bei jeder zeitlichen Änderung eines Vektors $\vec{G}$ in seinem RS eine zusätzliche Bewegung entsteht, welche als Präzession des RS gegenüber dem LS interpretiert werden kann. Folglich ist die gesamte zeitliche Änderung durch den formalen Zusammenhang der Thomas-Präzession in Gleichung (2.8) beschrieben. Mit Gleichung (2.14) folgt für die Frequenz:

$$\vec{\omega_T} = -\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\Omega}}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{a}\times\vec{v}}{c^2} \quad \text{mit:} \quad \vec{a}\ \text{Beschleunigung im LS} \tag{2.17}$$

Schlussendlich ist die Thomas-Präzession ein rein kinematischer Effekt. Dieser tritt immer in Erscheinung, wenn eine senkrechte Beschleunigung zu einer vorliegenden Geschwindigkeit existiert. Diese zusätzliche Präzessionsbewegung ist additiv zu weiteren Bewegungen durch andere Effekte.
Es ist so genau auf dieses Thema eingegangen worden, da diese Bewegungen in den späteren experimentellen Messungen des (g-2)-Faktors eine wichtige Rolle spielen. Außerdem wird in einem späteren Abschnitt gezeigt, dass die BMT-Gleichung – eine elegante Beschreibung der BWGL eines Spins in homogenen Feldern – diesen weiteren kinematischen Faktor mit berücksichtigt.

2.4 Magnetisches Moment

Ein magnetisches Moment ist eine Eigenschaft eines Teilchens mit Spin. Dabei hat dieses Teilchen die Möglichkeit mit externen elektromagnetischen Feldern zu wechselwirken. Nach der Quelle [7] ist das magnetische moment wie folgt definiert:

$$\vec{\mu} = g\frac{(Qe)\hbar}{2Mc}\vec{s} \tag{2.18}$$

Dabei steht e für die Elementarladung, M für die Ruhemasse des Teilchens, $\vec{s}$ für den Spin und Q für die Ladung des Teilchens. Die Größe g ist der sogenannte Landé-Faktor welcher teilchenspezifisch ist. Bei einer rein klassischen Betrachtung gilt $\hbar \to 1$. Teilchen mit einem magnetischen Moment vollziehen eine Präzessionsbewegung, wenn diese in einem externen Magnetfeld lokalisiert sind. Dies ist die Grundlage für die spätere Messung. Durch die vorhandene Präzessionsbewegung gibt es eine BWGL für den Spin, die in rein klassischer Form lautet:

$$\frac{d\vec{s}}{dt'} = g\frac{Qe}{2Mc}\vec{s} \times \vec{B}' \tag{2.19}$$

Hierbei werden die gestrichenen Größen im Ruhesystem des Teilchens betrachtet. Damit könnte man intuitiv eine Präzessionsfrequenz ω_{spin} der Form

$$\omega_{spin} = g\frac{Qe}{2Mc}\vec{B} \tag{2.20}$$

annehmen. Doch dies ist nicht der Fall. Vielmehr muss eine Erweiterung des Landé-Faktors $g = 2+2a_\mu$ erfolgen. Dieses a_μ wird als anomales mag. Moment bezeichnet.

3 Experimentelle Messung des magnetischen Moments

3.1 Prinzip

Durch das anomale magnetische Moment des Myons $a_\mu = \frac{g-2}{2}$ entsteht eine Präzession des Spins $\vec{s}$. Diese bewirkt eine Änderung des Winkels zwischen Spin und Impuls des Myons[4].
Die Bewegungsgleichung des Spins kann durch die Thomas-Präzession [6] oder die BMT-Gleichung [2] beschrieben werden [8]:

$$\omega_s = \frac{e}{M}\left\{\left(a_\mu + \frac{1}{\gamma}\right)\vec{B} - a_\mu \frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\vec{B}\right)\vec{\beta} - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\right\} \tag{3.1}$$

Das Myon befindet sich in externen elektrischen und magnetischen Feldern und die daraus resultierende Bewegungsgleichung (BWGL) ist abhängig von ω_a und der Zyklotronfrequenz ω_c. Daher gilt:

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c \tag{3.2}$$

$$\text{mit:} \quad \omega_c = \frac{e}{M}\left\{\frac{1}{\gamma}\vec{B} - \frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\right\} \tag{3.3}$$

$$\text{und somit:} \quad \omega_a = \frac{e}{M}\left\{a_\mu\vec{B} - a_\mu\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left(\vec{\beta}\vec{B}\right)\vec{\beta} - \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\right\} \tag{3.4}$$

Durch den Versuchsaufbau sollen die Bedingungen $\vec{\beta}\vec{B} = 0$ und $\gamma = 29{,}7 = \gamma_{magic}$ erfüllt sein. Die Wahl von γ erfolgt mit dem Ziel der Negierung des Einflusses des elektrischen Feldes auf ω_a[5]. Somit zerfällt die Gleichung (3.4) in die Form:

$$\omega_a = \frac{e}{M}a_\mu\vec{B} \tag{3.5}$$

Da beide Bedingungen nicht für alle Myonen exakt erfüllt werden können, müssen

[4] Dieser Effekt wäre nicht vorhanden, wenn $g = 2$ gelten würde.
[5] Mit $\gamma = 29{,}7$ gilt ungefähr, dass $(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1}) = 0$

Korrekturen berücksichtigt werden. Diese liegen im Bereich von 0,3−0,4 ppm [8]. Die Korrekturen stammen zum einen aus der Tatsachen, dass nicht alle Myonen genau den benötigten Impuls für γ_{magic} verfügen und damit Einflüsse vom elektrischen Feld entstehen, zum anderen haben die Myonen eine vertikale Bewegungskomponente welche die Bedingung $\vec{\beta}\vec{B} = 0$ verletzt[6]. Um mit Gleichung (3.5) a_μ berechnen zu können, müssen ω_a und $\vec{B}$ in verschiedenen Experimenten so genau wie möglich vermessen werden.

3.2 Versuchsaufbau

Um ω_a der Myonen zu messen werden diese von Protonen, die mit einer kinetische Energien von 24 GeV auf ein Target treffen, erzeugt. Dabei entstehen geladene Pionen welche mittels Magneten nach ihrem Impuls sortiert werden. Die Pionen zerfallen in geladene Antimyonen und Myon-Neutrinos. Die Antimyonen werden wiederum durch Magneten nach ihren Impulsen sortiert und jene, mit dem benötigten Impuls ($P \simeq 3{,}094$ GeV) [1], gelangen in den Antimyonen-Speicherring. Der Ring hat eine Torusform und einen Durchmesser von 14 Meter [8]. Im Speichering zerfallen die Antimyonen in e^+, ν_e und $\bar{\nu}_\mu$. Die Positronen werden durch 24 gleichmäßig im Inneren des Rings angebrachte Kalorimeter gemessen. Beim Zerfall der Myonen ist die Parität maximal verletzt und dadurch beeinflussen sich Impulsrichtung des entstandenen Positrons und voriger Spin des Myons. Dadurch ist es möglich, mit der zeitlichen Lokalisierung der Positronen einen Rückschluss auf die Präzessionsbewegung des Spins zu ziehen. Die Anzahl der detektierten Positronen im Kalorimeter lässt sich wie folgt beschreiben[8]:

$$N(t) = N_0(E_{th})e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + A(E_{th})\cos(\omega_a t + \phi)\right) \tag{3.6}$$

Wobei N, A energieabhängige Parameter sind und ϕ ein Phasenfaktor der Anfangspolarisation der Myonen ist. Die genaue Berechnung der Parameter kann aus den Quellen [8] oder [1] entnommen werden. Mit Gleichung (3.6) variiert die Anzahl gemessener Positronen mit der Frequenz ω_a periodisch. Somit kann durch zeitliches Auftragen diese Frequenz experimentell bestimmt werden.
Das Magnetfeld wird durch ein Verfahren namens Nuclear Magnetic Resonance (NMR) bestimmt. Dabei wird die Larmor-Spin-Präzession von Protonen in Wasser vermessen.

$$\text{Larmor-Präzession:} \quad \omega_L(p) = \omega_p = g_p\left(\frac{eB}{2M_p}\right), \tag{3.7}$$

wobei g_p das gyromagnetische Verhältnis des Protons ist.

[6] In der Quelle [1] sind die Korrekturen fehlerhaft hergeleitet. Bei der Berechnung der „Radial Electric Field Correction“ sind Rechenfehler in der Umformungen vorhanden.

Durch einige Umformungen ergibt sich der Endterm zur experimentellen Bestimmung des anomalen magnetischen Moments[7]:

$$a_\mu = \frac{\mathcal{R}}{\lambda - \mathcal{R}} \quad \text{mit:} \quad \mathcal{R} = \frac{\omega_a}{\omega_p}, \quad \lambda = \frac{\mu_\mu}{\mu_p} \tag{3.8}$$

3.3 Experimentelle Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden kurz die experimentellen Ergebnisse von CERN und E821 zusammengefasst und der aktuellste Stand vermittelt. Die experimentellen Rahmenbedingungen sind der Quelle [1] entnommen und stammen vom E821 Experiment. Die Feldstärke ist 1,45 T und die kinetische Energie der Myonen beträgt 3,094 GeV. Da E821 die aktuellste Messung ist, werden diese Parameter später zum Abschätzen der Abstrahlungseffekte und Extraterme verwendet.

Tabelle 3.1: Übersicht der CERN und E821 experimentellen Messung von a_μ zum Vergleich

Jahr	Experiment	Polung	$a_\mu \times 10^{10}$	Genauigkeit [ppm]
1974 - 1976	CERN III [10]	μ^+	11659100(110)	10
1975 - 1976	CERN III [10]	μ^-	11659360(120)	10
2000	BNL [11]	μ^+	11659204(9)	0,73
2001	BNL [12]	μ^-	11659214(9)	0,72

Hierbei wurden die Ergebnisse beider Experimente verglichen, um die Steigerung der Messgenauigkeit in den vergangenen Jahrzehnten zu verdeutlichen. Die aktuellsten experimentell und theoretisch bestimmten Werte betragen zur Zeit nach [9]:

$$a_\mu{}^{exp.} = 11659209{,}1(5{,}4)(3{,}3) \times 10^{-10} \tag{3.9}$$

$$a_\mu{}^{the.} = 116591803(1)(42)(26) \times 10^{-11} \tag{3.10}$$

Die Abweichung ist nach [9]

$$\Delta a_\mu = a_\mu{}^{exp.} - a_\mu{}^{the.} = 288(63)(49) \times 10^{-11}, \tag{3.11}$$

was einem Wert von 3,6 σ entspricht. Mit diesem Wert sowie den Gleichungen aus (3.8) kann abgeschätzt werden, dass für signifikante Änderungen von a_μ Extraterme für $\Delta\omega_a$ die Ordnung $\mathcal{O}(10^{-2}$ Hz) bzw. $\mathcal{O}(10^{-27}$ GeV) seien müssen.

[7] Mit $\lambda = 3{,}183345107(84)$[9]

4 BMT-Gleichung

4.1 Herleitung

Die gesamte Herleitung ist mit den gleichen Anfangsbedingungen wie in [5] eigenständig durchgeführt und somit überprüft. Im folgenden Abschnitt wird nur auf die wichtigsten Schritte eingegangen, um ein grundlegendes Verständis des Formalismus zu gewährleisten. Für die ausführliche Rechnung wird auf die Quellen [2] oder [5] verwiesen.

Die BMT-Gleichung ist eine Verallgemeinerung der klassischen BWGL eines Spins im Magnetfeld (2.19) [2]. Dabei liegt die kovariante Verallgemeinerung im Vordergrund. Die linke Seite der Gleichung (2.19) muss somit durch einen Vierervektor ausgedrückt werden. Dies geschieht mit einem axialen Vierervektor S^α, der drei unabhängige Komponenten besitzt und sich im Ruhesystem des Teilchens auf den Spin $\vec{s}$ reduziert [5].

$$S'^0 = \gamma \left(S^0 - \vec{\beta}\vec{S}\right) \qquad = \frac{1}{c} U_\alpha S^\alpha \tag{4.1}$$

$$\implies \quad U_\alpha S^\alpha = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{d\tau} U_\alpha S^\alpha = 0 \tag{4.2}$$

$$\implies \quad S^0 = \vec{\beta}\vec{S} \tag{4.3}$$

Durch eigenes Nachrechnen wurde gezeigt, dass eine Form des Pauli-Lubanski-Vektors diese Anforderungen erfüllt und somit als Ansatz für S^α geeignet ist[8]. Die Rechnungen sind im Anhang A.5 zu sehen.

Der Zusammenhang zwischen S^α und $\vec{s}$ ist mittels der Lorentz-Transformation wie folgt [5]:

$$\vec{S} = \vec{s} + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\right) \left(\vec{\beta}\vec{s}\right) \vec{\beta} \tag{4.4}$$

$$S^0 = \gamma \vec{\beta}\vec{s} \tag{4.5}$$

Der im RS definierte, räumliche Spinvektor bestimmt alle Komponenten von S^α in jedem anderen Inertialsystem. Die Zeitableitung geht in die Ableitung nach der Eigenzeit des Teilchens $dt \to d\tau$ über.

[8] $S^\alpha \mathrel{\hat{=}} \frac{\mathcal{W}^\alpha}{M}$ damit der Spin in Heaviside-Lorentz-Einheiten dimensionslos ist.

Die rechte Seite muss somit durch einen Vierervektor ausdrückbar sein. Dabei wurde in den Herleitungen [2] sowie [5] angenommen, dass die Gleichung linear im Spin S^α, in den Feldern $F^{\mu\nu}$ und der Zeitableitung $\frac{dU^\alpha}{d\tau}$ ist. Des Weiteren können Terme der Geschwindigkeit U^α enthalten sein. Die Gültigkeit der Annahme der Linearität von Feld und Spin wird im nächsten Abschnitt untersucht. Der Einfluss höherer Zeitableitungen bedingt Abstrahlungseffekte, auf die näher im Kapitel zur LAD-Gleichung eingegangen wird. Mit diesen Annahmen und Nebenbedingungen (NB) (4.2) und (2.19) entsteht folgende Form der kovarianten BWGL:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{ge}{2Mc}\left\{F^{\alpha\beta}S_\beta + \frac{1}{c^2}U^\alpha\left(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu\right)\right\} - \frac{1}{c^2}U^\alpha\left(S_\lambda\frac{dU^\lambda}{d\tau}\right) \tag{4.6}$$

Mit dem Spezialfall $\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{Mc}F^{\alpha\beta}U_\beta$ ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{Mc}\left\{\frac{g}{2}F^{\alpha\beta}S_\beta + \frac{1}{c^2}\left(\frac{g}{2}-1\right)U^\alpha\left(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu\right)\right\} \tag{4.7}$$

Wie im vorigen Abschnitt geschrieben, beschreibt diese Form der kovarianten BWGL die Thomas-Präzession des Spins. Diese Bewegung ist im letzten Term von (4.6) enthalten, denn S^α soll zu U^α zu allen Zeiten orthogonal sein. Somit ist dieser Term wie eine senkrechte Beschleunigung, die auf eine Bewegung – in diesem Fall den Spin – wirkt. Durch Betrachtung des Spins im RS und Umformungen folgt:

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{F} - \frac{\gamma\vec{\beta}}{\gamma+1}F_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left[\vec{s}\times\left(\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\beta}}{d\tau}\right)\right] \tag{4.8}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\vec{F}' + \vec{\omega_T}\times\vec{s} \tag{4.9}$$

Dabei sind $(F_0,\vec{F})$ als Raum-Zeit-Komponente des ersten Ausdrucks aus (4.6) und $F_0 = \vec{\beta}\vec{F}$ definiert. $\vec{F}'$ bezeichnet ein im RS betrachtetes Drehmoment . Damit ist die Gleichung (4.9) identisch mit (2.8). Durch das Transformationsverhalten der magnetischen Felder und der Bewegung von geladenen Teilchen in elektromagnetischen Feldern geht die Gleichung über in die Form:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{Mc}\vec{s}\times\underbrace{\left[\frac{e}{M}\left\{\left(a_\mu+\frac{1}{\gamma}\right)\vec{B} - a_\mu\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\vec{B}\right)\vec{\beta} - \left(\frac{g}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\right\}\right]}_{\omega_s} \tag{4.10}$$

Es ist gut zu sehen, dass der zweite Term des Kreuzproduktes in (4.10), welcher die zeitliche Änderung des Spins beeinflusst, gleich dem Term aus (3.1) ist. Damit genügt die BMT-Gleichung, in gleicher Weise wie die BWGL der Thomas-Präzession, der Beschreibung einer BWGL für einen Spin in externen homogenen Feldern.

4.2 Nichtlineare Terme

Dieser Abschnitt beinhaltet nur eigens erarbeitete Gleichungen sowie Überlegungen. Das Vorgehen besteht darin zunächst Gleichungen und Formalismen herzuleiten und zu erörtern. Danach werden diese im Kontext der Abweichung Δa_μ auf ihre Relevanz überprüft.

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, sind gewisse NB an weitere Terme der BMT-Gleichung gegeben. Mit den zusätzlichen Termen muss weiterhin $\frac{dS^\alpha}{d\tau} \to \frac{d\vec{s}}{dt}$ sowie $\frac{d}{d\tau}(S^\alpha U_\alpha) = S^\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} + U^\alpha \frac{dS^\alpha}{d\tau} = 0$ gelten. Weiterhin darf die Parität nicht verletzt werden und die Terme müssen einen kovarianten Vierervektor bilden.
Dadurch entfallen alle Möglichkeiten der Kombinationen von $(S^\alpha U_\alpha)$. Außerdem können aufgrund der antisymmetrischen Eigenschaft von $F^{\mu\nu}$ keine Terme mit beliebiger Kombination von $x_\delta F^{\delta\beta} x_\beta$ vorkommen. Denn es gilt:

$$x_\delta F^{\delta\beta} x_\beta = x_\beta F^{\delta\beta} x_\delta = -x_\beta F^{\beta\delta} x_\delta \quad \Longrightarrow \quad x_\delta F^{\delta\beta} x_\beta = 0 \tag{4.11}$$

Wenn nun Terme höherer Ordnung in Feldern, Geschwindigkeit und Spin angenommen werden, haben diese bezüglich dieser Größen ebenfals Einheiten höherer Ordnung. Um eine sinnvolle Übereinstimmung zwischen linker und rechter Seite der Gleichungen zu gewährleisten, müssen diese Ordnungen mit Vorfaktoren kompensiert werden. Dies geschiet durch Multiplikation von Naturkonstanten (NK) und der Ruhemasse, welche die benötigte Einheit bilden. Somit kann durch Betrachten dieser Vorfaktoren ein Rückschluss auf den Effekt neuer Zusatzterme auf die bestehende Gleichung getroffen werden. In den nächsten Abschnitten wird das SI-Einheitensystem verwendet.

4.2.1 Höhere Ordnungen in $F^{\mu\nu}$

Die Einheit des Feldstärketensors ist Tesla (T). Somit sind Terme höherer Ordnung mit Faktoren der Einheit $\frac{1}{T}$ unterdrückt, der außerdem mit einem Skalierungsfaktor behaftet ist. Die Einheit T kann durch Kombination der folgenden NK und der Ruhemasse M gebildet werden:

$$\epsilon_0{}^{n_1}\ ,\ \hbar^{n_2}\ ,\ c^{n_3}\ ,\ e^{n_4}\ ,\ M^{n_5}$$

Dabei soll n_i eine ganze Zahl sein. Die NK und Ruhemasse haben folgende Einheiten:

$$\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\right)^{n_1}, \ (\mathrm{CVs})^{n_2}, \ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{n_3}, \ \mathrm{C}^{n_4}, \ \left(\frac{\mathrm{CVs}^2}{\mathrm{m}^2}\right)^{n_5},$$

wobei C: Coulomb, V: Volt, s: Sekunde und m: Meter sind.

Mit den Produkten der NK und der Ruhemasse kann jede relevante Größe über Vergleich der Exponenten bestimmt werden. Denn nach Ausmultiplizieren und Ordnen folgt:

$$C^{n_1+n_2+n_4+n_5} \cdot V^{-n_1+n_2+n_5} \cdot m^{-n_1+n_3-2n_5} \cdot s^{n_2-n_3+2n_5} = \text{relevante Einheit} \tag{4.12}$$

Somit können durch das Lösen von linearen Gleichungssystemen (GLS) alle relevanten Kombinationen von SI-Einheiten für die benötigte Größe betrachtet werden. Für den Fall $\frac{1}{T} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ folgt:

$$\begin{array}{ccccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \tag{4.13}$$

Das GLS ist unterbestimmt, da fünf Unbekannte mit vier Gleichungen berechnet werden. Somit kann eine Variable frei gewählt werden. Diese sei n_1 und damit resultiert die Bedingungen an die Exponenten:

$$n_2 = n_1 + 1, \quad n_3 = n_1 - 2, \quad n_4 = -2n_1 + 1, \quad n_5 = -2$$

und daraus folgende Kombination der Einheiten:

$$\underbrace{\left(\frac{\epsilon_0 \hbar c}{e^2}\right)^{n_1}}_{\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{n_1}} \cdot \left(\frac{\hbar e}{c^2 M^2}\right) \tag{4.14}$$

Dabei ist $\alpha = \frac{1}{137}$ die einheitslose Kopplungskonstante der QED und eine sinnvolle Größe, die im Zusammenhang mit der Betrachtung von elektromagnetischen Feldern auftreten sollte. Der erste Term stellt den Skalierungsfaktor da. Es wird $n_1 = 1$ gesetzt. Dies ist gewählt, da α die Kopplungskonstate der WW in der QED darstellt. Jede höhere Ordnung von α ist mit WW höherer Ordnung gleichzusetzen und nach der QED damit unwahrscheinlicher. $n_1 = 0$ beschreibt daher keine WW. Somit ist die Wahl von n_1 vernünftig.

Dies entspricht einem unterdrückenden Faktor der Ordnung $\mathcal{O}(10^{-13}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}})$ für den Fall eines Myons. Jedoch entfallen Terme zweiter Ordnung, da diese Felder zweiter Ordnung enthalten und somit unabhängig von der Spinausrichtung sind. Im Experiment hingegen werden Unterschiede in der Energie der Spinzustände vermessen [13]. Somit sind erst Felder dritter Ordnung relevant für die Messung. Diese werden hingegen mit einem Faktor von $\mathcal{O}(10^{-26}\ \left(\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}\right)^2)$ unterdrückt und sind zu vernachlässigen.

4.2.2 Dritte und höhere Ordnungen der Geschwindigkeit

Wie in (4.6) zu sehen, enthält die Gleichung bereits Geschwindigkeitsterme zweiter Ordnung. Diese werden mit dem Faktor $\frac{1}{\mathrm{c}^2}$ unterdrückt. Terme dritter beziehungsweise vierter oder höherer Ordnung müssen folglich mit weiteren Faktoren von $\frac{1}{\mathrm{c}}$ kompensiert werden, wodurch der Term jedesmal um eine weitere Ordnung von $\mathcal{O}(10^{-8}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}})$ verringert wird. Es ist nicht ausgeschlossen, dass diese kompensierenden Terme mit einem beliebigen sklaren Faktoren multipliziert werden. Doch wenn diese in Relation zu den übrigen Termen der BMT-Gleichung gesetzt werden, muss dieser Faktor verhältnismäßig sein. Da keiner der Vorhandenen BMT-Terme mit einem skalaren Faktor der Ordnung $\mathcal{O}(10^8)$ multipliziert ist, ist dies für den unterdrückenden Faktor ebenfalls ausgeschlossen. Vielmehr sieht man in Gleichung (4.6), dass die Terme mit Faktoren kleiner eins behaftet sind. Daher kann hier der Schluss gezogen werden, dass Terme höherer Ordnung als drei in der Geschwindigkeit keinen Einfluss auf die experimentellen Messwerte haben.

4.2.3 Höhere Ordnungen im Spin S^α

Bei Betrachtung höherer Ordnung des Spins sind, wie in Abschnitt 4.2.1, Einheiten höherer Ordnung mit NK und der Ruhemasse zu kompensieren. Es gilt $S^\alpha = \frac{\mathcal{W}^\alpha}{M}$ und somit muss der Vorfaktor die Einheiten $\frac{1}{\mathrm{CVm}} = (\mathrm{CVm})^{-1}$ besitzen.

$$\begin{array}{ccccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \tag{4.15}$$

n_1 ist wieder frei wählbar und so gilt:

$$n_2 = n_1 + 1, \quad n_3 = n_1 + 1, \quad n_4 = -2n_1, \quad n_5 = 0 \tag{4.16}$$

Mit der gleichen Begründung wie in Abschnitt 4.2.1 ist $n_1 = 1$ und es folgt:

$$\left[\left(\frac{\epsilon_0\hbar c}{e^2}\right)^{n_1}\cdot(\hbar c)\right]^{-1} = 4\pi\alpha\left(\frac{1}{\hbar c}\right) \tag{4.17}$$

Da jedoch der Spin rein klassisch betrachtet wird, muss der Übergang von $\hbar \to 1$ für eine klassische Beschreibung beachtet werden. Somit gilt letztendlich für den unterdrückenden Faktor $4\pi\alpha\left(\frac{1}{c}\right)$, was wiederum proportional zu $\frac{1}{c}$ ist. Analog zur Geschwindigkeit in Kapitel 4.2.2 ist damit jede weitere Erhöhung der Ordnung des Spins mit einer Unterdrückung von $\mathcal{O}(10^{-10}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}})$ verbunden.

4.3 Mögliche Extraterme

Durch die in den Abschnitten 4.2.1, 4.2.2 und 4.2.3 erläuterten Zusammenhänge sowie die NB und Paritätserhaltung sind die Möglichkeiten für Extraterme E^α stark eingeschränkt. Terme mit Feldern dritter Ordnung sind auszuschließen. Des Weiteren haben Terme mit Kombination zwischen Geschwindigkeiten und Spin höherer Ordnung als drei wenig Einfluss. Zudem muss weiterhin die Einheit des Extraterms mit der linken Seite der BWGL übereinstimmen. Außerdem sind weitere Terme, die dem Vielfachen bereits existierender Terme der BMT-Gleichung entsprechen, nicht relevant, da dadurch keine neuen physikalischen Effekte beschrieben werden. Es wird berücksichtigt, dass eine Änderung von ω_a für einen relevanten Einfluss, durch (3.11) und (3.8) bestimmt, die Ordnung $\mathcal{O}(10^{-27}$ GeV) haben sollte. Somit bleiben als möglich Terme:

$$E_1{}^\alpha = \frac{e}{Mc^3}\left(S_\gamma \tilde{F}^{\gamma\delta}U_\delta\right)S^\alpha = \frac{e}{2Mc^3}\left(S_\gamma \varepsilon^{\gamma\delta\mu\nu}F_{\mu\nu}U_\delta\right)S^\alpha \tag{4.18}$$

$$E_2{}^\alpha = \left(\frac{\hbar e}{c^4M^2}\right)\left(U^\mu\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}\partial^\nu F^{\gamma\delta}\right)S^\alpha \tag{4.19}$$

Durch explizites Ausrechnen der Terme kann deren Einfluss auf das Ergebniss der Messung abgeschätzt werden. Dabei wird eine Maximalabschätzung mit $v \approx c$ und $|\vec{S}| = \frac{1}{2}$ untersucht.

$$E^{BMT}{}_1 \quad \text{ist Ordnung} \quad \mathcal{O}(10^{-32}\ \text{GeV}) \tag{4.20}$$

$$E^{BMT}{}_2 \sim \kappa\cdot\left(\omega_{B-Feld}|\vec{B}|\right)\ \text{GeV} \tag{4.21}$$

Dabei ist ω_{B-Feld} die Frequenz, mit der sich das Magnetfeld ändern würde, wenn es nicht zeitlich konstant wäre. κ ist ein skalarer Faktor aus den Vorfaktoren. Im Experiment ist jedoch ein zeitlich konstantes Magnetfeld vorgegeben. Selbst wenn minimale zeitliche Änderungen existieren würden, müsste das Feld mit einer Frequnz $\mathcal{O}(10^{25}$ Hz) wechseln, um einen Einfluss auf ω_a zu haben. Dieser Wert ist jedoch nicht realistisch.

Somit kann durch eine rein klassische Betrachtung die Annahme von [2] bestätigt werden und der Einfluss von Extratermen höherer Ordnung oder anderer Kombinationen ist zu vernachlässigen.

5 Relativistische Abstrahlungseffekte

5.1 Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung

Im ersten Abschnitt wird kurz die Theorie hinter diesem Formalismus angesprochen. Im zweiten Abschnitt werden selbsterarbeitete Ergebnisse erörtert.

Die LAD-Gleichung basiert auf der Larmor-Formel, welche die abgegebene Energie eines beschleunigten Elektrons beschreibt [14]. Dieser Ansatz ist von Lorentz 1909 weiterentwickelt worden, indem er diese abgegebene Energie als eine Abbremskraft auf das Elektron beschreibt. Später ist dies von M. Abraham relativistisch verallgemeinert worden [14]:

$$F_R^\mu = \frac{2}{3}e^2 \left(\frac{d^2U^\mu}{dt^2} + \frac{dU^\nu}{dt}\frac{dU_\nu}{dt}U^\mu \right) \tag{5.1}$$

In Gleichung (5.1) sind Terme mit Ordnung zwei in der zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit enthalten. Später hat Dirac versucht, dass Problem abstrahlender Elektronen stimmig zu lösen. Durch einen Ansatz von gekoppelten Maxwell- und Lorentz- systemen und einem klassischen Prinzip der Renomierung hat er als Lösung die bekannte LAD-Gleichung folgender Form erhalten [14]:

$$M\frac{dU^\mu}{dt} = eF^{\mu\nu}U_\nu + \underbrace{\frac{2}{3}e^2 \left(\frac{d^2U^\mu}{dt^2} + \frac{dU^\nu}{dt}\frac{dU_\nu}{dt}U^\mu \right)}_{F_R^\mu} \tag{5.2}$$

Doch die LAD-Gleichung ist physikalisch unstimmig, da sie einen sogenannten runaway-Effekt für das betrachtete Teilchen als Lösung liefert. Dieser Effekt beschreibt eine exponentielle Divergenz der Beschleunigung des Teilchens selbst bei nicht vorhandenen externen Feldern [15].
Dieses Problem wurde von Landau und Liftshitz behoben, indem sie eine Möglichkeit gefunden haben, bei bestimmten Bedingungen, die LAD-Gleichung zu entwickeln. Diese Bedingungen sind definiert [16]:

$$\lambda \gg \alpha\lambda_C \quad \text{und} \quad F \ll \frac{F_{er}}{\alpha} \tag{5.3}$$

Wobei $F_{er} \sim \frac{M^2}{e}$ die kritischse elektromagnetische Feldstärke der QED und λ_c die Comptonwellenlänge des betrachteten Teilchens ist. Die Bedingungen sind an die Wellenlänge und Feldamplitude des externen elektromagentischen Feldes geknüpft. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, kann die LAD-Gleichung in die LL-Gleichung entwickelt werden [16]:

$$
\begin{aligned}
M\frac{dU^\mu}{dt} = eF^{\mu\nu}U_\nu + \frac{2}{3}e^2\Bigg[&\frac{e}{M}\left(\partial_\alpha F^{\mu\nu}\right)U^\alpha U_\nu \\
&- \frac{e^2}{M^2}F^{\mu\nu}F_{\alpha\nu}U^\alpha + \frac{e^2}{M^2}\left(F^{\alpha\nu}U_\nu\right)\left(F_{\alpha\lambda}U^\lambda\right)U^\mu\Bigg]
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Einfluss der Abstrahlungseffekte auf das E821 Experiment

Zunächst muss verifiziert werden, dass die Bedingungen aus (5.3) für die Entwicklung durch das Experiment gegeben sind. Die Feldamplitude F des externen Feldes hat die Ordnung $\mathcal{O}(10^{-17}\ \text{GeV}^2)$. Für ein Myon hat die kritische Feldstärke F_{er} die Ordnung $\mathcal{O}(10^{-2}\ \text{GeV}^2)$. Somit ist die erste Bedingung erfüllt. Die typische Wellenlänge des externen elektromagentischen Feldes bei E821 liegt im Berreich von $\mathcal{O}(10^1\ \text{m})$. Die Comptonwellenlänge des Myons ist $\mathcal{O}(10^{-15}\ \text{m})$. Folglich ist die zweite Bedingungen in (5.3) ebenfalls erfüllt.
Nun werden die Terme explizit ausgerechnet um die vorgegebenen Größen des Experiments einsetzen zu können. Damit kann der Einfluss der Abstrahlungseffekte durch beschleunigte Ladung untersucht werden. Die Ableitungen wirken nur auf den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ bzw. seine Komponenten. Dabei wird angenommen, dass das Magnetfeld überall und zu allen Zeiten homogen ist.

$$
\left(\partial_\alpha F^{\mu\nu}\right)U^\alpha U_\nu = \left[\underbrace{U^0\partial_0 F^{\mu\nu}}_{\text{Wird betrachtet mit }\cdot U_\nu} - U^1\partial_1 F^{\mu\nu} - U^2\partial_2 F^{\mu\nu} - U^3\partial_3 F^{\mu\nu}\right]U_\nu
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow U^0\partial_0\underbrace{\left(U_0F^{\mu 0} - U_1F^{\mu 1} - U_2F^{\mu 2} - U_3F^{\mu 3}\right)}_{\text{Für alle weiteren Terme gleich } := I^\mu} \\
&\Longrightarrow I^\mu = \gamma\begin{pmatrix} \vec{v}\vec{E} \\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= U^0\partial_0 I^\mu - U^1\partial_1 I^\mu - U^2\partial_2 I^\mu - U^3\partial_3 I^\mu \\
&= \gamma^2\begin{pmatrix} \vec{v}\ \dot{\vec{E}} - \vec{v}\ \vec{\nabla}(\vec{E}\ \vec{v}) \\ (\dot{\vec{E}} + \vec{v}\times\dot{\vec{B}}) - (\vec{v}\ \vec{\nabla})\vec{E}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\text{Da Felder zeitl const. folgt:} \quad = \gamma^2 \begin{pmatrix} -\vec{v}\vec{\nabla}(\vec{E}\vec{v}) \\ -(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{E} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} U^{\alpha} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\vec{E}^2}{c} + \frac{\vec{E}}{c}\left(\vec{B} \times \vec{v}\right) \\ -(\frac{\vec{\beta}}{c}\vec{E})\vec{E} - (\vec{B} \times \vec{E}) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

$$\left(F^{\mu\nu} U_{\nu}\right)\left(F_{\alpha\lambda} U^{\lambda}\right) U^{\mu} = \gamma^2 \left(\frac{\vec{E}^2}{\gamma^2} + |\vec{B} \times \vec{v}|^2\right) U^{\mu} \tag{5.7}$$

Nun kann in Heavisde-Lorentz-Einheiten die Größe der Terme in GeV angegeben werden, um somit eine Aussage über ihre Relevanz treffen zu können.

$$E^{LAD}{}_1 = \left(\partial_\alpha F^{\mu\nu}\right) u^{\alpha} u_{\nu} = 0 \tag{5.8}$$

$$E^{LAD}{}_2 = \frac{e^4}{M^3} F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} u^{\alpha} \sim 10^{-40} \text{ GeV} \tag{5.9}$$

$$E^{LAD}{}_3 = \frac{e^4}{M^3} \left(F^{\mu\nu} u_{\nu}\right)\left(F_{\alpha\lambda} u^{\lambda}\right) u^{\mu} \sim 10^{-30} \text{ GeV} \tag{5.10}$$

Der erste Term ist null, da zur Fokusierung des Myonenstrahls im Ring ein spezielles Quadrupolfeld verwendet wird. Dabei wird angenommen, dass das Feld idealerweise senktrecht zu Bewegung der Myonen ist. Dieses Feld kann in Nähe des Teilchenstrahls linear approximiert werden. Die resultierende Entwicklung hat die Form $\vec{E} = (\kappa x, -\kappa y, 0)$ nach [1] und die Divergenz verschwindet.

Die Abstrahlungseffekte durch höhere Zeitableitung liegen aufsummiert im Berreich $E^{LAD}{}_1 + E^{LAD}{}_2 + E^{LAD}{}_3 = \mathcal{O}(10^{-30}$ GeV). In Relation zur Abweichung sind diese drei Größenordnungen kleiner und deshalb, ebenso wie die untersuchten Extraterme in der BMT-Gleichung, vernachlässigbar.

5.2 Synchrotronstrahlung geladener Teilchen bei Kreisbewegung

Es folgt zunächst wieder eine kurze theoretische Erläuterung, die in Eigenarbeit nachgerechnet wurde. Da die gesamte Rechnung zu umfangreich für diese Arbeit ist, wird auf die ausführliche Diskussion in [5] verwiesen. Im zweiten Abschnitt werden Einflüsse auf das Experiment diskutiert.

Die Grundlage des Abstrahlungseffekts liegt in der Larmorschen Formel für nichtrelativistische beschleunigte Ladungen [5]. Der allgemeine relativistische Ausdruck der Strahlungsleistung ist von Liénard 1898 geliefert worden [5]:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{M^2c^3}\left(\dot{\vec{\beta}}^2 - \left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)^2\right) \tag{5.11}$$

Nun kann die Beschleunigung in zwei Komponenten aufgeteilt werden, welche parallel und senkrecht zur Bewegung sind. Die senkrechte Beschleunigung kann als eine Kreisbewegung eines bewegten Teilchens interpretiert werden. Wenn die Komponenten einzeln betrachtet werden, ergeben sich die Formeln [5]:

$$\text{parallel:}\quad P_{||} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{M^2c^3}\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 \tag{5.12}$$

$$\text{senkrecht:}\quad P_{\perp} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{M^2c^3}\gamma^2\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 \tag{5.13}$$

Die parallele Komponente $P_{||}$ ist gegenüber der senkrechten Komponente $P_{\perp}$ um den Faktor $\frac{1}{\gamma^2}$, bei Beschleunigung gleichen Betrages, unterdrückt. Damit kann bei der folgenden Betrachtung die parallele Komponente bis zur Ordnung $\frac{1}{\gamma^2}$ vernachlässigt werden. Somit kann die emittierte Strahlung einer beliebigen ultrarelativistischen Bewegung näherungsweise durch die momentane Bewegung eines Teilchens auf dem Bogen einer Kreisbahn approximiert werden. Für den expliziten Fall des Myons im Speicherring ist das Frequenzspektrum der abgestrahlten Energie von Interesse. Mit diesem kann der Übergang von einer rein klassischen Betrachtung zur quantenmechanischen vollzogen werden. Denn aus dem Frequenzspektrum kann ein Rückschluss auf die mittlere Anzahl abgestrahlter Photonen pro Umlauf und Teilchen geschlossen werden. Desweiteren kann eine mittlere Photonenenergie bestimmt werden, mit der untersucht wird, ob die druch Synchrotronstrahlung abgestrahlte Energie Einfluss auf die experimentellen Messungen hat. Für die Frequenzverteilung abgestrahlter Energie folgt [17]:

$$\frac{dI}{d\omega} = \sqrt{3}\,\frac{e^2}{c}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(x)dx, \tag{5.14}$$

mit $\omega_c = \omega_0\frac{3}{2}\gamma^3$, wobei $\omega_0 = \frac{c}{R}$ und R der Radius des Kreisrings ist. ω_c beschreibt die kritische Frequenz, bei der die Strahlung bei jedem Winkel zu vernachlässigen ist[5]. $K_{5\backslash 3}(x)$ ist eine MacDonald-Funktion. Wird nun die Gleichung (5.14) durch $\hbar\omega$ geteilt und über die Frequenz integriert, erhält man die mittlere Anzahl der pro Umlauf und Teilchen abgestrahlten Photonen:

$$\text{mittlere Anzahl:}\qquad N = \frac{5\pi}{\sqrt{3}}\gamma\alpha \tag{5.15}$$

$$\text{mit mittlerer Energie:}\quad \langle\hbar\omega\rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}}\hbar\omega_c \tag{5.16}$$

Einfluss der Synchrotronstrahlung auf E821

Mit den Gleichungen (5.15) und (5.16) sowie den experimentellen Größen $R = 6$ m , $\gamma_{magic} = 29{,}3$ und $\alpha = \frac{1}{137}$ ergeben sich die Werte:

$$N \approx 2 \quad \text{Photonen} \tag{5.17}$$

$$\langle \hbar\omega \rangle \approx 8{,}7 \times 10^{-9} \text{ eV} \tag{5.18}$$

Folglich verliert ein Myon pro Umlauf die Energie von $E_{round} = 1{,}74 \times 10^{-8}$ eV, was durch eine Verringerung der kinetischen Energie zu beobachten ist. Durch die ultrarelativistische Geschwindigkeit der Myonen wird ihre Lebensdauer von 2,19711 μs auf 64,378 μs verlängert. Somit durchläuft das Myon den Ring ungefähr 440 mal. Damit verliert es in seiner gesamten Lebensdauer die Energie:

$$E^{Syn}{}_{life} = \frac{v\tau_\mu}{2\pi R} \cdot E_{round} = 7{,}64 \times 10^{-6} \text{ eV} \qquad \text{mit } v \approx c \tag{5.19}$$

Im Vergleich dazu beträgt die kinetische Energie der Myonen im Speichering $E_{Ring} = 3{,}094$ GeV, was einem relativen Änderung von $\Delta P_{rel} = \frac{E^{Syn}{}_{life}}{E_{Ring}} = 10^{-13}\%$ des Impulses vom Myon entspricht. Da die generelle Abweichung der Impulse der Myonen ist, durch das Experiment, mit
$\pm 0{,}5$ % [1] gegeben ist, kann der Einfluss der Synchrotronstralung auf die experimentellen Werte ebenfalls vernachlässigt werden.

Man könnte meinen, dass die mittlere Energie mit einer größeren Frequenz als ω_c berechnet werden kann und somit höhere Werte für die abgestrahlte Energie pro Umlauf und Teilchen erhält. Dem ist aber nicht so, denn der Abfall der Verteilung der Frequenzen ist stark exponentiell nach der kritischen Frequenz. Daher treten Frequenzen größer ω_c nur sehr selten auf. Dies ist sehr gut im oberen Graphen in der Quelle [5] auf Seite 787 dargestellt.

6 Resümee

In den ersten Kapiteln der Arbeit sind verschiedene theoretische Grundlagen besprochen worden. Dabei wurden zunächst Eigenschaften der Lorentz-Transformation hergeleitet. Dies ist als wichtig erachtet worden, da bei der Beschreibung von Bewegungsgleichungen eines Spins in homogenen äußeren Feldern benötigte physikalische Effekte rein relativistische Ursachen haben. Danach sind in eigener Arbeit relativistischen Einflüsse in Form der Thomas-Präzession hergeleitet worden. Die experimentellen Grundlagen sowie Ergebnisse dienten dem allgemeinen Verständnis der BWGL eines Spins sowie den Rahmenbedingungen der Messung. Mit den aktuellen Ergebnissen konnte des Weiteren eine qualitative Aussage über die Zusatzterme und Abstrahlungseffekte getroffen werden, wodurch es ermöglicht wurde, die verschiedenen Resultate zu verifizieren. Weiterhin ist die BMT-Gleichung hergeleitet worden um ihre Gültigkeit zu überprüfen. Des Weiteren sind mögliche Extraterme zur BMT-Gleichung berechnet worden, deren Einfluss jedoch vernachläsigbar ist. Am Ende sind verschiedene Abstrahlungseffekte in Form der LL-Gleichung und Synchrotronstrahlung untersucht worden. Dafür sind die einzelnen Werte in eigener Arbeit berechnet worden.
Im Folgenden werden alle Ergebnisse nochmals in einer Tabelle zusammengefasst und entschieden, ob eine Signifikanz im Vergleich zur Abweichung von $\Delta a_\mu = 288(63)(49) \times 10^{-11}$ vorliegt. Dabei sind, wie erwähnt, die experimentellen Vorgaben verwendet worden. Diese sind:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &\approx c \\ |\vec{B}| &\approx 10^{-17}\ \text{GeV}^2 \\ |\vec{E}| &\approx 10^{-25}\ \text{GeV}^2 \\ |P^\mu| &= 3{,}094\ \text{GeV} \end{aligned}$$

Die Feldstärke ist umgerechnet worden. In SI-Einheiten ist die Feldstärke beim E821 Experiment 1,45 T [1]. Damit ergeben sich folgende Ergebnisse:

Tabelle 6.1: Übersicht der verschiedenen Ergebnisse aus den Kapiteln 4 und 5 in Bezug zur experimentellen Abweichung und Signifikanz

Art	Term	Wert	Einheit	relative Änderung [%]	Signifikanz
BMT	${E^{BMT}}_1$	10^{-32}	GeV	10^{-5}	Nein
BMT	${E^{BMT}}_2$	0	–	0	Nein
LAD	${E^{LAD}}_1$	0	–	0	Nein
LAD	${E^{LAD}}_2$	10^{-40}	GeV	10^{-13}	Nein
LAD	${E^{LAD}}_3$	10^{-30}	GeV	10^{-3}	Nein
Synchrotron	${E^{Syn}}_{life}$	$7{,}64 \times 10^{-15}$	GeV	10^{-14}	Nein

Es ist gut in Tabelle 6.1 zu sehen, dass keiner der Terme einen signifikanten Einfluss auf das Messergebnis hat. Daher wird mit den erarbeiteten Ergebnissen bestätigt, dass die Unstimmigkeit zwischen Theorie und Experiment im Wert a_μ nicht durch Vernachlässigen von Abstrahlungseffekten oder falsche Annahmen in der Bestimmungsgleichung bedingt sind.

Somit wird von diesem Standpunkt aus behauptet, dass die Erklärung der Abweichung durch genaueres Betrachten oder gewisse Erweiterungen des SM gefunden werden könnten. Heute existieren schon einige vielversprechende neue Ansätze. Eine Möglichkeit ist die Erweiterung des SM auf das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM). Dabei wird jedem bis jetzt gefundenen Teilchen ein Superpartner zugeordnet uns zusätzliche Higgs-Bosonen eingeführt. Andererseits könnte die Unstimmigkeit auch dadurch erklärt werden, dass bei der quantenfeldtheoretischen Berechnung zu wenige Ordnungen betrachtet worden sind. Denn die QFT lässt WW beliebiger Ordnungen zu, die in einer unendlichen Reihe aufsummiert werden müssten. Aus rein technischen und natürlich zeitlichen Gründen ist dies nicht im vollen Umfang möglich. Deshalb könnten durch weiteres Betrachten höherer Ordnungen die Abweichung korrigiert werden. Im Ganzen verspricht die Lösung des Problems ein viel tieferes Verständnis der Teilchenphysik.

A Definitionen und Konventionen

A.1 Einheitensystem und Minkowski-Metrik

In dieser Arbeit wird das Heaviside-Lorentz- und SI-Einheitensystem verwendent. Des weiteren wird der metrische Tensor in zeitartiger Konvention verwendet.

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{A.1}$$

A.2 Summenkonvention

In dieser Ausarbeitung wird über gleiche Indizes nach der Einsteinschen Summenkonvention summiert, wenn nicht anders angegeben. Desweiteren beschreiben alle Vektoren mit griechischen Buchstaben Vierer-Vektoren.

A.3 Eichung

Die Elektrodynamik ist stets unter Lorenzeichung betrachtet worden. Die Wahl der Eichung hat keinen Einfluss auf die Felder, da die Maxwellgleichungen eichinvariant sind. Die Lorenzeichung ist des Weiteren relativistisch invariant.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0 \tag{A.2}$$

A.4 Fundamentalmatrizen

Die drei Fundamentalmatrizen der räumlichen Drehung S_i und des reinen Boosts K_i sind wie folgt definiert:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

A.5 Pauli-Lubanski-Vierervektor

Dieser Vektor ist ein Pseudovektor der Form:

$$\mathcal{W}^\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{J}_{\gamma\delta}P_\beta \tag{A.5}$$

Wobei $\mathcal{J}$ der relativistische Drehimpulstensor ist. Dieser Pseudovektor erfüllt alle Bedingungen an die kovariante Beschreibung der BWGL des Spins, denn es gilt:

$$\begin{aligned} u_\alpha\mathcal{W}^\alpha &= u_\alpha\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{J}_{\gamma\delta}P_\beta = M\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\alpha u_\beta\mathcal{J}_{\gamma\delta} \\ &= m\,\underbrace{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\alpha\beta}}_{=0}\,u^\beta u_\beta\mathcal{J}_{\gamma\delta} = 0 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Des Weiteren reduziert sich der Vektor im Ruhesystem $P_\mu = (Mc, M\vec{v}) \rightarrow \left(Mc, \vec{0}\right)$ nach

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\alpha &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha 0\gamma\delta}Mc\mathcal{J}_{\gamma\delta} \\ \Longrightarrow \mathcal{W}^0 &= 0 \\ \Longrightarrow \mathcal{W}^1 &= \frac{Mc}{2}\epsilon^{10\gamma\delta}\mathcal{J}_{\gamma\delta} = \frac{Mc}{2}\left(\epsilon^{1023}\mathcal{J}_{23} + \epsilon^{1032}\mathcal{J}_{32}\right) = Mc\left(\mathcal{J}_{32} - \mathcal{J}_{23}\right) \mathrel{\hat{=}} McS_x, \end{aligned} \tag{A.7}$$

auf die benötigte Form[9].

$\mathcal{W}^0$ ist keine unabhängige Größe wenn nicht im Ruhesystem betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^0 = \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{0\beta\gamma\delta}}_{\text{Alle Permutationen}}\mathcal{J}_{\gamma\delta}P_\beta = \ldots &= \frac{M}{2}\Big[\left(\mathcal{J}_{32} - \mathcal{J}_{23}\right)v_x + \\ &+ \left(\mathcal{J}_{31} - \mathcal{J}_{13}\right)v_y + \left(\mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{21}\right)v_z\Big] = \\ &= \frac{M}{2}\left(2s_xv_x + 2s_yv_y + 2s_zv_z\right) = \vec{P}\vec{S} \end{aligned} \tag{A.8}$$

[9] Analog Rechung für $\mathcal{W}^2$ und $\mathcal{W}^3$

B Formalismen

B.1 Ko- & Kontravariante Schreibweise

Allgemein sind Vierervektoren Quadrupel, die nach Lorentz-Transformation transformieren. Im Folgenden werden die wichtigsten Vierervektoren erläutert.

$$\begin{aligned} &\text{Ortsvektor (Kontravariant): } x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) && \text{(B.1)} \\ &\text{Ortsvektor (Kovariant) : } \quad x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, x_1, x_2, x_3) \\ &\qquad\qquad = (ct, -\vec{r}) && \text{(B.2)} \end{aligned}$$

Somit unterscheiden sich ko- und kontravariante Vektoren nur in ihrer räumlichen Komponente um ein Vorzeichen. Dies gilt für alle Vierervektoren.
Die Transformation zwischen ko- und kontravariant erfolgt mittels metrischen Tensors. Dieser ist im vorherigen Abschnitt A festgelegt worden. Daraus folgt:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{bez.} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \text{wobei gilt:} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} = \mathbb{1} \tag{B.3}$$

Weitere benötigte Vierervektoren sind:

$$\begin{aligned} &\text{Vierergeschwindigkeit:} && v^\mu = (c\ , v^1, v^2, v^3) && \text{(B.4)} \\ &\text{Viererimpuls:} && p^\mu = \left(\tfrac{E}{c}\ , p^1, p^2, p^3\right) && \text{(B.5)} \\ &\text{Vierergradient (Kontravariant):} && \tfrac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\tfrac{\partial}{\partial(ct)}, -\tfrac{\partial}{\partial x}, -\tfrac{\partial}{\partial y}, -\tfrac{\partial}{\partial z}\right) && \text{(B.6)} \\ &\text{Vierergradient (Kovariant):} && \tfrac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\tfrac{\partial}{\partial(ct)}, \tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right) && \text{(B.7)} \end{aligned}$$

Allgemein sind Vierervektoren nur Spezialfälle von Tensoren 1. Ordnung[10]. In der Relativistik werden des Weiteren Tensoren 2. Ordnung verwendet, von denen ein bekannter Vertreter die Lorentz-Transformation ist. Der Wechsel zwischen ko- und kontravarianter Notation ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} T_{\alpha\beta} \qquad \text{bez.} \qquad T^\nu_\mu = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} \tag{B.8}$$

[10] Skalare sind Tensoren 0. Ordnung

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die relativistische Invarianz des Vierer-Skalarprodukts.

$$\text{Def. Vierer-Skalarprodukt:} \quad x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^{4} x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned} \text{Relat. Invarianz:} \quad x'_\mu x'^\mu &= x_\alpha \underbrace{\Lambda(\vec{\beta})_\mu{}^\alpha \Lambda(\vec{\beta})^\mu{}_\beta}_{\delta^\alpha{}_\beta} x^\beta = x_\alpha \delta^\alpha{}_\beta x^\beta \\ &= x_\alpha x^\alpha = x_\mu x^\mu \end{aligned} \tag{B.10}$$

B.2 Elektrodynamik und kovariante Formulierung

Die Elektrodynamik wird durch die vier Maxwellgleichungen beschrieben. Diese sind eichinvariant sowie relativistisch kovariant[11]. Dabei beschreiben die Maxwellgleichungen physikalische Felder ($\vec{E}$, $\vec{B}$) sowie Potentiale (Φ, $\vec{A}$). Im Fall der Felder haben sie folgende Form:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{B.11}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0; \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \tag{B.12}$$

Im Fall der Potentiale spricht man auch von Wellengleichungen (WG). Dabei wird folgender Ansatz für die Maxwellgleichungen für Potentiale verwendet:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad , \vec{A}\text{: Vektorpot., } \Phi\text{: Skalarpot.} \tag{B.13}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{B.14}$$

Da die relativistische Kovarianz in Vektorschreibweise schwer zu erkennen ist, ist es oft nützlich, eine kovariante Darstellung zu verwenden. Dafür müssen folgende Vierervektoren definiert werden:

$$\text{Def. Viererpotential:} \quad A^\mu = \left(\tfrac{\Phi}{c},\ \vec{A}\right) \tag{B.15}$$

$$\text{Def. Viererstromdichte:} \quad j^\mu = \left(c\rho,\ \vec{j}\right) \ , \rho\text{: Ladungsdichte, } \vec{j}\text{: Ladungsstrom} \tag{B.16}$$

Daraus ergeben sich folgende Formen der Lorenzeichung und Kontinuitätsgleichung:

[11] Sie ändern ihr Form unter Lorentz-Transformation nicht.

$$\text{Lorenzeichung:} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{B.17}$$
$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{B.18}$$

Sowie die Wellengleichung in Lorenzeichung:

$$\Box A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \tag{B.19}$$

Mit dem definierten Viererpotential kann weiterhin eine kovariante Darstellung der Felder in Form eines Feldstärketensors definiert werden:

$$\text{Def. Feldstärketensor:} \quad F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{B.20}$$

Dieser hat folgende Eigenschaften:

$$\text{Spurfrei:} \quad F^{\mu\mu} = 0 \tag{B.21}$$
$$\text{Antisymmetrisch:} \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{B.22}$$
$$\text{invariant unter Eichtransformation:} \quad F^{`\mu\nu} = F^{\mu\nu} \tag{B.23}$$

Die explizite Form des Tensors ergibt sich mit Gleichungen (B.13), (B.14) und (B.20) in folgender Form:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.24}$$

Mit dieser Form kann der duale Feldstärketensor wie folgt definiert werden:

$$\tilde{F^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{B.25}$$

Mit (B.24) werden nun die Maxwellgleichungen in folgender kovarianter Form geschrieben[12]:

$$\text{homogene Maxwellgleichung:} \quad \partial^\kappa F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^{\kappa\mu} = 0 \tag{B.26}$$
$$\text{inhomogene Maxwellgleichung:} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{B.27}$$

[12] Dabei muss gelten: $\kappa \neq \mu \neq \nu$. Sonst trivialerweise durch Eigenschaften (B.21) und (B.22) des Feldstärketensors erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] F. Jegerlehner, The anomalous magnetic moment of the muon, *Springer Tracts Mod.Phys.* **226**, 1 (2008).

[2] V. Bargmann, L. Michel, and V. Telegdi, Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field, *Phys.Rev.Lett.* **2**, 435 (1959).

[3] A. Einstein, On the electrodynamics of moving bodies, *Annalen Phys.* **17**, 891 (1905).

[4] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4*, 8. ed. (Springer Verlag, 2013).

[5] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 3. ed. (Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2002).

[6] L. Thomas, The motion of a spinning electron, *Nature* **117**, 514 (1926).

[7] A. V. Kirill Melnikov, *Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment* (Springer Verlag, 2006).

[8] J. M. Paley, Measurement of the anomalous magnetic moment of the negative muon to 0.7 parts per million, (2004).

[9] Particle Data Group, J. B. et al., Review of Particle Physics (RPP), *Phys.Rev.* **D86**, 0100001 (2012), and 2013 partial update for the 2014 edition.

[10] CERN-Mainz-Daresbury Collaboration, J. Bailey *et al.*, Final Report on the CERN Muon Storage Ring Including the Anomalous Magnetic Moment and the Electric Dipole Moment of the Muon, and a Direct Test of Relativistic Time Dilation, *Nucl.Phys.* **B150**, 1 (1979).

[11] Muon g-2 Collaboration, G. Bennett *et al.*, Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm, *Phys.Rev.Lett.* **89**, 101804 (2002), hep-ex/0208001.

[12] Muon g-2 Collaboration, G. Bennett *et al.*, Measurement of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm, *Phys.Rev.Lett.* **92**, 161802 (2004), hep-ex/0401008.

[13] T. Kinoshita, editor, *Quantum Electrodynamics* (Singapore ; New Jersey ; London ; Hong Kong : World Scientific, 1990).

[14] A. Di Piazza, C. Muller, K. Hatsagortsyan, and C. Keitel, Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems, *Rev.Mod.Phys.* **84**, 1177 (2012), 1111.3886.

[15] F. Hartemann, High-field electrodynamics, (2002).

[16] L. Landau, E. Lifshitz, H. Schopf, and P. Ziesche, TEXTBOOK ON THEORETICAL PHYSICS. VOL. 2: CLASSICAL FIELD THEORY. (IN GERMAN), (1987).

[17] J. S. Schwinger, On the classical radiation of accelerated electrons, *Phys.Rev.* **75**, 1912 (1949).

Danksagung

Vor allem möchte ich meinen Freunden und Kollegen danken, die mir während der Arbeit zum Einen die manchmal nötige Ablenkung verschafften und zum Anderen bei Fragen hilfreich zur Seite standen. Dabei möchte ich besonders zwei Personen hervorheben.

Zum einen Philipp Trommler, der sich des öfteren durch meine Arbeit gekämpft hat und bei Rechtschreibung sowie Ausdruck tatenreich zur Seite stand und somit zum äußeren Eindruck der Arbeit Einiges beigetragen hat.
Desweiteren Kyrill Leier, der mir Anfang des Jahres bei persönlichen Problemen sehr hilfreich zur Seite stand, denn ohne diese vielen aufmunternden Stunden wäre es vielleicht nicht so schnell zu dieser Arbeit gekommen.

Außerdem möchte ich mich noch bei meinem Betreuer Prof. Dr. Dominik Stöckinger bedanken, denn egal wann ich seine Hilfe brauchte, er hatte immer Zeit für mich und meine Fragen. In einigen längeren Gesprächen diskutierten wir Probleme und brachten mich damit auf den richtigen Weg zurück.

Vielen Dank.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Krpoun, Christoph
Dresden, Mai 2014