

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Anatomie der hadronischen Light-by-Light-Beiträge zu $(g-2)$ des Myons

Bachelor-Arbeit
zur Erlangung des Hochschulgrades
Bachelor of Science
im Bachelor-Studiengang Physik

vorgelegt von

PATRICK KNESCHKE
geboren am 31.07.1991 in LÖBAU

Institut für Kern- und Teilchenphysik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden
2013

Eingereicht am 04. Juni 2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger
2. Gutachter: Prof. Dr. Michael Kobel

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird sich mit dem Beitrag der hadronischen Light-by-Light-Streuung zur magnetischen Anomalie des Myons befasst. Dieser ist experimentell nicht voll zugänglich und kann auch nur modellabhängig berechnet werden. Die zu diesem Prozess gehörende Vierpunktfunktion ist ein sehr komplexes Objekt, kann aber zur Vereinfachung in lorentz-kovariante Strukturen zerlegt werden. Diese treten jeweils mit einer unbekanntem Funktion als Koeffizient auf. Ziel dieser Arbeit ist es die in der Literatur angegebenen Kovariantenzerlegungen zu verstehen und nachzuvollziehen, wie die Zahl der unbekanntem Funktionen reduziert werden kann. Dazu wird die Ward-Identität ausgenutzt und die Symmetrie der Vierpunktfunktion unter verschiedenen Permutationen ihrer Argumente untersucht. Weiterhin wird gezeigt, dass sich die Zahl der unabhängigen Terme noch weiter reduzieren lässt, indem man von einer verschwindenden Kopplung an das äußere Feld ausgeht. Außerdem wird dargelegt wie T_1 und T_2 des Pion-Pol-Beitrags zu berechnen sind.

Abstract

This thesis deals with the hadronic light by light contribution to the magnetic anomaly of the muon, which is not fully experimental accessible, also all theoretical calculations are model dependent. The four-point-function that belongs to this process is a very complex object, but it can be simplified by decomposing it in lorentz covariant structures. Each of them comes with a unknown function as a coefficient. The main aim of this work is the comprehension of the covariant decompositions given in the literature and to understand how the number of unknown functions can be reduced. For this the Ward identity is used and a survey of the symmetry of the four-point-function under permutation of its arguments is done. Furthermore it is shown that the number of terms is reduced farther by considering a vanishing coupling on the external field. At last it is demonstrated how the T_1 and T_2 in the pion-pole contribution are computed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Hauptteil	3
2.1	Zweipunktfunktion	3
2.2	Dreipunktfunktion	4
2.3	Vierpunktfunktion	5
2.3.1	Symmetrie	6
2.3.2	Beitrag zu a_{μ}^{LbL}	8
2.3.3	Weitere Zerlegung	10
2.4	Pion-Austausch	12
3	Zusammenfassung	17
A	Anhang	19
	Literaturverzeichnis	21

1 Einleitung

Das magnetische Moment des Myons ist eine der am besten bestimmten Größen in der Physik. Der Vergleich der experimentellen Daten mit den theoretischen Berechnungen stellt einen Präzisionstest für das Standardmodell dar. Es wird in Einheiten des Bohrschen Magnetons angegeben, in der Form $\mu = g \cdot \mu_B$, mit $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$. Nach Dirac ergibt sich für den Faktor g genau 2, aber Messungen zeigen, dass schon in der dritten Nachkommastellen eine Abweichung davon auftritt, welche als magnetische Anomalie bezeichnet wird und durch $a_\mu = \frac{g-2}{2}$ gegeben ist. Die aktuellen experimentellen Daten, der Muon g-2 Collaboration des E821 Experiments, liefern [5]:

$$a_\mu(\text{exp}) = 11659208(6) \times 10^{-10} \quad .$$

Im Rahmen des Standardmodells gibt es drei Beiträge zu a_μ [3]. Der dominante Anteil resultiert aus QED-Beiträgen, durch den Austausch von virtuellen Photonen und Leptonen. Diese gliedern sich in Beiträge verschiedener Ordnung, wie den one-loop- oder two-loop Beiträgen in Abb.1.1 und werden als leptonische Vakuumpolarisation bezeichnet.

Die zweite Klasse von Beiträgen kommt aus dem elektroschwachen Sektor und entsteht durch den Austausch von W-,Z- oder Higgs-Bosonen. Der für diese Arbeit interessante Teil ist der hadronische Beitrag, welcher sich aufspaltet in hadronische Vakuumpolarisation und Light-by-Light-Streuung, zu sehen in Abb.1.2 . Die exakte Bestimmung der hadronischen Beiträge ist insofern wichtig, dass sie den dominanten Teil der Unsicherheit der Standardmodellvorhersage ausmachen.

Die Light-by-Light-Beiträge zu a_μ lassen sich berechnen mit

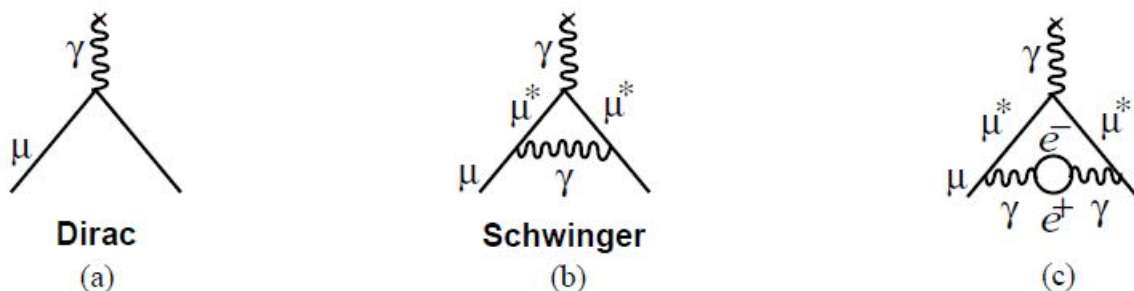


Abbildung 1.1: QED-Beiträge zu $g-2$. In a) die einfache Kopplung an das Feld, daneben der one-loop-Beitrag in b) und der two-loop- Beitrag in c). Graphik aus [6]

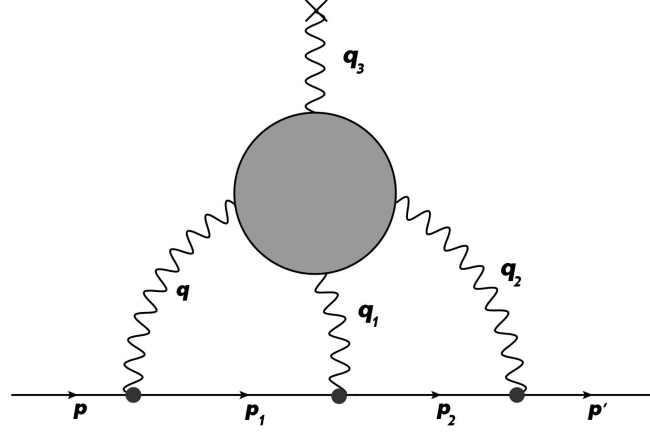


Abbildung 1.2: Light-by-Light-Beitrag zu $g-2$. Die untere Linie steht für ein Myon, der graue Blob ist der hadronische Anteil. Alle Photonlinien sollen als einlaufend gesehen werden, das Kreuz symbolisiert die Kopplung an ein äußeres Feld.

$$a_{\mu}^{LbL} = -\frac{e^6}{48m} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 q_1^2 q_2^2 (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)} \times \left. \frac{\delta \Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3)}{\delta q_{3\tau}} \right|_{q_3=0} Tr((\not{p} + m)\gamma_{\mu}(\not{p}_1 + m)\gamma_{\nu}(\not{p}_2 + m)\gamma_{\rho}(\not{p} + m)[\gamma_{\tau}, \gamma_{\sigma}]) \quad (1.1)$$

wobei m die Myonmasse und p der Myon-Viererimpuls ist [3]. Im Limes $q_3 \rightarrow 0$ ist $q = -q_1 - q_2$, $p_1 = p - q$ und $p_2 = p - q - q_1 = p + q_2$. Die Größe $\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3)$ ist die Vierpunktfunktion der Light-by-Light-Streuung und ist definiert durch

$$\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3) = i^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 e^{i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 + q_3 \cdot x_3)} \langle 0 | T j^{\mu}(0) j^{\nu}(x_1) j^{\rho}(x_2) j^{\sigma}(x_3) | 0 \rangle \quad (1.2)$$

mit dem Zeitordnungsoperator T . Um a_{μ}^{LbL} zu berechnen muss die Funktion $\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3)$ bekannt sein, sie kann aber zunächst in lorentz-kovariante Strukturen zerlegt werden, wie in Gleichung 2.12 gezeigt ist. Sie enthält viele unterschiedliche Funktionen von q_1 , q_2 und q_3 , wodurch zwei sehr unterschiedliche Energiebereiche in die Berechnung eingehen, sowohl der störungstheoretisch handhabbare Teil hoher Energien als auch der nicht-störungstheoretische niedrige Energiebereich [3]. Der tatsächlich berechnete Light-by-Light-Beitrag ist damit abhängig von dem der Berechnung zugrunde liegenden Modell und den verwendeten Näherungen, worauf hier aber nicht eingegangen wird. Es ist aber auf Grund der Komplexität der Vierpunktfunktion nützlich, die Zahl der unbekanntenen Größen in ihr durch Ausnutzung zusätzlicher Relationen und Symmetrien zu reduzieren. Dadurch sinkt auch der Rechenaufwand bei der Bestimmung des Integral 1.1. Diese Vereinfachung soll den Hauptteil dieser Arbeit einnehmen und anschließend die Berechnung der Beiträge durch den Austausch neutraler Pionen, wie sie in [7],[8] und [9] durchgeführt wurde, nachvollzogen werden.

2 Hauptteil

Es wird nun gezeigt, wie sich die Kovariantenzerlegung der Vierpunktfunktion der hadronischen Light-by-Light-Beiträge vereinfachen lässt. Dazu werden zunächst einfachere Funktionen betrachtet und ausgehend von einer Zweipunktfunktion, über die Dreipunktfunktion für den Übergang eines skalaren Meson in zwei Photonen, auf die Struktur der Vierpunktfunktion geschlossen. Die wichtigste Bedingung, die hier ausgenutzt wird, ist die Gültigkeit der Ward-Identität.

Für eine gegebene Amplitude eines Streuprozesses $A(q_1, \dots, q_n) = \epsilon_{1\mu_1} \dots \epsilon_{n\mu_n} A^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1, \dots, q_n)$, wobei die $\epsilon_{i\mu_i}$ die Polarisierungen der an dem Prozess beteiligten Photonen sind, gilt für alle Photon-Viererimpulse $q_{i\mu_i}$

$$q_{i\mu_i} A^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (2.3)$$

Dadurch wird ausgedrückt, dass der longitudinale Freiheitsgrad eines realen Photons unphysikalisch ist.

2.1 Zweipunktfunktion

Die einfachste Kovariantenzerlegung lässt sich für eine Zwei-Punkt-Funktion durchführen. Das einlaufende Photon mit Vierer-Impuls q_1^μ geht über in einen nicht näher bestimmten Hadronenblob, zu sehen in Abb.2.3 a) und läuft anschließend mit unveränderten Impuls $-q_2^\nu = q_1^\nu$ wieder aus. Dafür existieren genau zwei mögliche Kovarianten und die Zweipunktfunktion hat demnach die Form

$$\Pi^{\mu\nu}(q_1, -q_1) = g^{\mu\nu} \Pi_1(q_1, -q_1) + q_1^\mu q_1^\nu \Pi_2(q_1, -q_1) \quad (2.4)$$

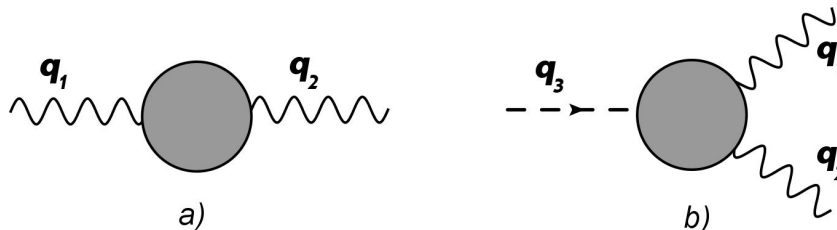


Abbildung 2.3: Streuprozesse mit Hadronenblob für zwei, bzw. drei beteiligte Teilchen. Alle Impulse sind einlaufend gewählt.

Ausnutzen der Ward-Identität $q_{1\mu}\Pi^{\mu\nu} = 0$ liefert die Beziehung $\Pi_2 = -\frac{\Pi_1}{q_1^2}$, wodurch die Funktion, unter Benutzung des transversalen Projektors $T^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$, eine sehr einfache Form annimmt.

$$\Pi^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - \frac{q_1^\mu q_1^\nu}{q_1^2})\Pi_1 = T^{\mu\nu}(q_1)\Pi_1 \quad (2.5)$$

Im Folgenden wird für die Projektoren die Kurznotation eingeführt

$$T_a^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}(q_a) = g^{\mu\nu} - \frac{q_a^\mu q_a^\nu}{q_a^2} \quad (2.6)$$

2.2 Dreipunktfunktion

Analog geht es für die Dreipunktfunktion weiter. Die beiden äußeren Photonen in Abb.2.3 b) haben die Vierer-Impulse q_1^μ und q_2^ν , das skalare Meson trägt den Impuls $q_3 = -q_1 - q_2$. Mit zwei unabhängigen Impulsen und zwei Lorentz-Indizes lassen sich nun fünf Kovarianten bilden und die Dreipunktfunktion schreibt sich demnach als

$$\Pi^{\mu\nu}(q_1, q_2, -q_1 - q_2) = g^{\mu\nu}\Pi_0 + q_1^\mu q_1^\nu \Pi_{11} + q_1^\mu q_2^\nu \Pi_{12} + q_2^\mu q_1^\nu \Pi_{21} + q_2^\mu q_2^\nu \Pi_{22} \quad (2.7)$$

Durch die Ward-Identität für beide Impulse q_1^μ und q_2^ν ergeben sich die Relationen

$$0 = (\Pi_0 + q_1^2 \Pi_{11} + q_1 \cdot q_2 \Pi_{21})q_1^\nu + (q_1^2 \Pi_{12} + q_1 \cdot q_2 \Pi_{22})q_2^\nu \quad (2.8)$$

$$0 = (q_1 \cdot q_2 \Pi_{11} + q_2^2 \Pi_{12})q_1^\mu + (\Pi_0 + q_1 \cdot q_2 \Pi_{21} + q_2^2 \Pi_{22})q_1^\mu \quad (2.9)$$

wodurch sich alles durch nur zwei Kovarianten ausdrücken lässt

$$\Pi^{\mu\nu} = (q_1 \cdot q_2 g^{\mu\nu} - q_2^\mu q_1^\nu)\Pi_{21} + q_2^2 (g^{\mu\nu} - \frac{q_1^\mu q_1^\nu}{q_1^2} - \frac{q_2^\mu q_2^\nu}{q_2^2} + \frac{q_1 \cdot q_2}{q_1^2 q_2^2} q_1^\mu q_2^\nu)\Pi_{22} \quad (2.10)$$

Unter Benutzung der transversalen Projektoren der Zweipunktfunktion lässt sich zeigen, dass diese Kovarianten Kombinationen der solchen sind, die durch Kontraktion mit einem metrischen Tensor oder zwei Impulsen entstehen, und das Ergebnis kann wieder vereinfacht darstellen, als

$$\Pi^{\mu\nu} = (q_1 \cdot q_2 \times T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} - T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta})\Pi_{21} + q_2^2 \times T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} \Pi_{22} \quad (2.11)$$

Die Dreipunktfunktion kann demnach aus der Zweipunktfunktion konstruiert werden, wobei die Ward-Identität durch die Transversalprojektoren erfüllt ist. Es kann also angenommen werden, dass dies auch für die Vierpunktfunktion möglich ist, was im folgenden Abschnitt auch bestätigt wird.

2.3 Vierpunktfunktion

Der Hauptteil dieser Arbeit wird sich der Vierpunktfunktion widmen, welche den in Abb.1.2 dargestellten Hadronenblob repräsentiert. In diesen laufen die Viererimpulse q^μ , q_1^ν , q_2^ρ und q_3^σ ein, wobei durch Impulserhaltung gilt: $q = -q_1 - q_2 - q_3$. Aus drei unabhängigen Impulsen und vier Lorentz-Indizes lassen sich nun ganze 138 Kovarianten bilden.

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3) = & \Pi_1(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \Pi_2(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \\
& + \Pi_3(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + \Pi_{1,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\nu}q_i^\rho q_j^\sigma \\
& + \Pi_{2,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\rho}q_i^\nu q_j^\sigma + \Pi_{3,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\mu\sigma}q_i^\nu q_j^\rho \\
& + \Pi_{4,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\nu\rho}q_i^\mu q_j^\sigma + \Pi_{5,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\nu\sigma}q_i^\mu q_j^\rho \\
& + \Pi_{6,i,j}(q_1, q_2, q_3)g^{\rho\sigma}q_i^\mu q_j^\nu \\
& + \Pi_{i,j,k,m}(q_1, q_2, q_3)q_i^\mu q_j^\nu q_k^\rho q_m^\sigma
\end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei $i, j, k, m = 1, 2, 3$ und q_3 der Impuls des externen Photons ist. Durch Ausnutzen der Ward-Identität lassen sich durch die erhaltenen Relationen alle Koeffizienten durch 43 der $\Pi_{i,j,k,m}(q_1, q_2, q_3)$ ausdrücken [1], [3]. Hier wird allerdings ein konstruktiver Ansatz gewählt, bei dem die Vierpunktfunktion aus Termen aufgebaut wird, die automatisch die Ward-Identität erfüllen. Ausgangspunkt ist die triviale Identität:

$$\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad . \tag{2.13}$$

Die metrischen Tensoren lassen sich nun in die Summe aus transversalem und longitudinalem Projektor umschreiben

$$\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = (T^{\mu\alpha} + \frac{q^\mu q^\alpha}{q^2})(T_1^{\nu\beta} + \frac{q_1^\nu q_1^\beta}{q_1^2})(T_2^{\rho\gamma} + \frac{q_2^\rho q_2^\gamma}{q_2^2})(T_3^{\sigma\delta} + \frac{q_3^\sigma q_3^\delta}{q_3^2})\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{2.14}$$

wobei jedoch die longitudinalen Projektoren wegen der Ward-Identität keinen Beitrag liefern. Die Vierpunktfunktion lässt sich demzufolge schreiben als

$$\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = T^{\mu\alpha}T_1^{\nu\beta}T_2^{\rho\gamma}T_3^{\sigma\delta}\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad . \tag{2.15}$$

Da jeder Projektor kontrahiert mit seinem eigenen Impuls Null liefert und durch die Impulserhaltung einer der drei verbliebenen Impulse ersetzt werden kann, ist sofort klar, dass einige Kovarianten wegfallen. Jeder Projektor kann so nur noch mit zwei möglichen Impulsen oder einem metrischen Tensor kontrahiert werden ohne dass der Term verschwindet. Der daraus resultierende Ausdruck enthält nur noch 43 unabhängige Kovarianten (Gl.2.16). Die geschweiften Klammern dienen dabei der Kurzschreibweise und fassen alle Terme zusammen, in denen die in ihnen stehenden Impulse enthalten sind.

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = & T^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_1^{\nu\beta} T_2^{\rho\gamma} g_{\gamma\delta} T_3^{\sigma\delta} \Pi_1 + T^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_2^{\rho\gamma} T_1^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T_3^{\sigma\delta} \Pi_2 + T^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T_3^{\sigma\delta} T_1^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_2^{\rho\gamma} \Pi_3 \\
& + T^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_1^{\nu\beta} T_2^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{3\gamma}\} T_3^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{1\{1,3\}\{1,2\}} \\
& + T^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_2^{\rho\gamma} T_1^{\nu\beta} \{q_{2\beta}, q_{3\beta}\} T_3^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{2\{2,3\}\{1,2\}} \\
& + T^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T_3^{\sigma\delta} T_1^{\nu\beta} \{q_{2\beta}, q_{3\beta}\} T_2^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{3\gamma}\} \Pi_{3\{2,3\}\{1,3\}} \\
& + T_1^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_2^{\rho\gamma} T^{\mu\alpha} \{q_{1\alpha}, q_{2\alpha}\} T_3^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{4\{1,2\}\{1,2\}} \\
& + T_1^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T_3^{\sigma\delta} T^{\mu\alpha} \{q_{1\alpha}, q_{2\alpha}\} T_2^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{3\gamma}\} \Pi_{5\{1,2\}\{1,3\}} \\
& + T_2^{\rho\gamma} g_{\gamma\delta} T_3^{\sigma\delta} T^{\mu\alpha} \{q_{1\alpha}, q_{2\alpha}\} T_1^{\nu\beta} \{q_{2\beta}, q_{3\beta}\} \Pi_{6\{1,2\}\{2,3\}} \\
& + T^{\mu\alpha} \{q_{1\alpha}, q_{2\alpha}\} T_1^{\nu\beta} \{q_{2\beta}, q_{3\beta}\} T_2^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{3\gamma}\} T_3^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{\{1,2\}\{2,3\}\{1,3\}\{1,2\}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der ursprünglichen Vierpunktfunktion lassen sich deren Koeffizienten durch die in Gl.2.16 angegebenen ausdrücken. Laut Bijmens, Pallante und Prades tragen nur 32 Terme zu a_μ^{LbL} bei, das sind in der Ableitung von $\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}$, für $q_3 \rightarrow 0$, die Terme mit $\Pi_{3,j,k,m}$, $\Pi_{i,3,k,m}$, $\Pi_{i,j,3,m}$ und der Ableitung von $\Pi_{i,j,k,1} - \Pi_{i,j,k,2}$, wobei $i, j, k, m = 1, 2$ [1]. Da in 2.16 jedoch andere Funktionen auftreten, konnte keine direkte Überprüfung erfolgen. Es wird hingegen untersucht welchen Beitrag diese liefern. Zunächst wird aber auf die Symmetrie der Funktionen eingegangen, was sich als hilfreich für die weitere Behandlung der Beiträge herausstellen wird.

2.3.1 Symmetrie

Da es die Integration einfacher machen wird, werden die Impulse in Abb.1.2 zunächst anders bezeichnet. Das erste und das äußere Photon werden einlaufend gewählt und tragen die Impulse q_1^μ und q^σ , wohingegen das zweite und dritte innere Photon aus dem Hadronenblob auslaufen und die Impulse q_3^ρ und q_2^ν tragen, wobei gilt $q = -q_1 + q_3 + q_2$ (Abb.2.4). Die in Gl.2.16 angegebene Funktion wird damit zu

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = & T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} T_3^{\rho\gamma} g_{\gamma\delta} T^{\sigma\delta} \Pi_1 + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T^{\sigma\delta} \Pi_2 + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T^{\sigma\delta} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\rho\gamma} \Pi_3 \\
& + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} T_3^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{2\gamma}\} T^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{1\{1,2\}\{1,2\}} \\
& + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_2^{\nu\beta} \{q_{1\beta}, q_{3\beta}\} T^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{2\{1,3\}\{1,2\}} \\
& + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T^{\sigma\delta} T_2^{\nu\beta} \{q_{1\beta}, q_{3\beta}\} T_3^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{2\gamma}\} \Pi_{3\{1,3\}\{1,2\}} \\
& + T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_1^{\mu\alpha} \{q_{2\alpha}, q_{3\alpha}\} T^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{4\{2,3\}\{1,2\}} \\
& + T_2^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T^{\sigma\delta} T_1^{\mu\alpha} \{q_{2\alpha}, q_{3\alpha}\} T_3^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{2\gamma}\} \Pi_{5\{2,3\}\{1,2\}} \\
& + T_3^{\rho\gamma} g_{\gamma\delta} T^{\sigma\delta} T_1^{\mu\alpha} \{q_{2\alpha}, q_{3\alpha}\} T_2^{\nu\beta} \{q_{1\beta}, q_{3\beta}\} \Pi_{6\{2,3\}\{1,3\}} \\
& + T_1^{\mu\alpha} \{q_{2\alpha}, q_{3\alpha}\} T_2^{\nu\beta} \{q_{1\beta}, q_{3\beta}\} T_3^{\rho\gamma} \{q_{1\gamma}, q_{2\gamma}\} T^{\sigma\delta} \{q_{1\delta}, q_{2\delta}\} \Pi_{\{2,3\}\{1,3\}\{1,2\}\{1,2\}}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

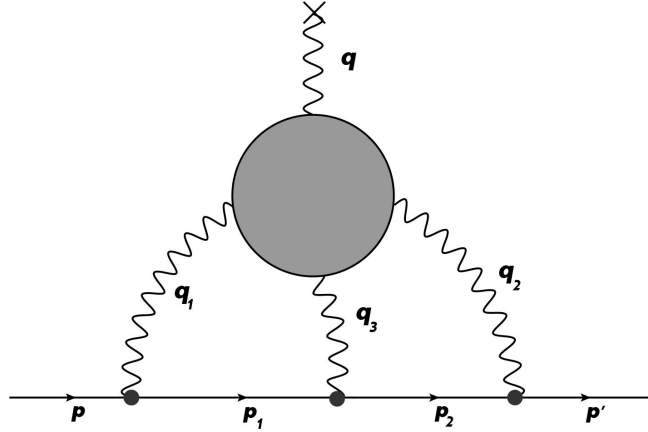


Abbildung 2.4: Feynman-Diagramm der Light-by-Light-Streuung mit neuer Wahl der Impulse. Hier sind q_1 und q einlaufend und q_2 sowie q_3 auslaufend.

Aus der Definition der Vierpunktfunktion (Gl.1.2) folgt, dass sie auf Grund des Zeitordnungsoperators die Bose-Symmetrie erfüllt, also invariant ist unter Vertauschungen von Impulsen und deren zugehörigen Lorentz-Indizes. Diese Symmetrie kann benutzt werden, um die Zahl der unbekanntenen Funktionen noch drastisch zu reduzieren. Einige der Kovarianten bleiben unverändert, wenn zwei Impulse vertauscht werden. Andere gehen ineinander über, was eine Beziehung zwischen ihren Koeffizienten liefert. Es gibt insgesamt 6 verschiedene Permutationen der drei unabhängigen Impulse und durch Koeffizientenvergleich wird festgestellt, dass den 43 Koeffizienten der Kovarianten nur 9 verschiedene Funktionen g_0, g_1, \dots, g_8 zu Grunde liegen. Mit $g(q_1, q_2, q_3) = g(1, 2, 3)$ lassen sich die Koeffizienten schreiben als

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= g_0(1, 2, 3) = g_0(2, 1, 3) & \Pi_{421} &= g_1(2, 3, 1) - g_2(2, 3, 1) \\
 \Pi_2 &= g_0(1, 3, 2) = g_0(3, 1, 2) & \Pi_{422} &= g_1(2, 3, 1) \\
 \Pi_3 &= g_0(3, 2, 1) = g_0(2, 3, 1) & \Pi_{431} &= g_1(3, 2, 1) - g_2(3, 2, 1) \\
 & & \Pi_{432} &= g_2(3, 2, 1) \\
 \\
 \Pi_{111} &= g_1(1, 2, 3) & \Pi_{311} &= g_3(1, 2, 3) = g_3(1, 3, 2) \\
 \Pi_{112} &= g_2(1, 2, 3) & \Pi_{312} &= g_4(1, 2, 3) \\
 \Pi_{121} &= g_2(2, 1, 3) & \Pi_{331} &= g_4(1, 3, 2) \\
 \Pi_{122} &= g_1(2, 1, 3) & \Pi_{332} &= g_5(1, 2, 3) = g_5(1, 3, 2) \\
 \\
 \Pi_{211} &= g_1(1, 3, 2) & \Pi_{521} &= g_4(2, 1, 3) \\
 \Pi_{212} &= g_1(1, 3, 2) - g_2(1, 3, 2) & \Pi_{522} &= g_3(2, 1, 3) = g_3(2, 3, 1) \\
 \Pi_{231} &= g_2(3, 1, 2) & \Pi_{531} &= g_5(2, 1, 3) = g_5(2, 3, 1) \\
 \Pi_{232} &= g_1(3, 2, 1) - g_2(3, 2, 1) & \Pi_{532} &= g_4(2, 3, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{621} &= g_5(3, 1, 2) = g_5(3, 2, 1) & \Pi_{2322} &= g_6(2, 3, 1) \\
\Pi_{623} &= g_4(3, 2, 1) & \Pi_{3111} &= g_6(1, 3, 2) \\
\Pi_{631} &= g_4(3, 1, 2) & \Pi_{3112} &= g_6(1, 3, 2) + g_7(1, 3, 2) \\
\Pi_{633} &= g_3(3, 1, 2) = g_3(3, 2, 1) & \Pi_{3121} &= g_8(1, 3, 2) \\
& & \Pi_{3122} &= g_8(2, 1, 3) \\
\Pi_{2111} &= g_6(1, 2, 3) & \Pi_{3311} &= g_7(3, 1, 2) \\
\Pi_{2112} &= g_7(1, 2, 3) & \Pi_{3312} &= g_6(3, 1, 2) + g_7(3, 1, 2) \\
\Pi_{2121} &= g_7(2, 1, 3) & \Pi_{3321} &= g_6(3, 2, 1) + g_7(3, 2, 1) \\
\Pi_{2122} &= g_6(2, 1, 3) & \Pi_{3322} &= g_7(3, 2, 1) \\
\Pi_{2311} &= g_8(1, 2, 3) \\
\Pi_{2312} &= g_8(2, 3, 1) \\
\Pi_{2321} &= g_6(2, 3, 1) + g_7(2, 3, 1)
\end{aligned}$$

Wird der Projektor durch eine Vertauschung mit q_3 kontrahiert, ist dieser wieder durch $q_1 - q_2$ zu ersetzen. Deshalb sind einige der Π Summen aus den Funktionen $g_{0..8}$. Damit ist der minimale Satz an noch zu bestimmenden Größen beispielsweise

$$\{\Pi_1, \Pi_{111}, \Pi_{112}, \Pi_{311}, \Pi_{312}, \Pi_{332}, \Pi_{2111}, \Pi_{2112}, \Pi_{2311}\}$$

2.3.2 Beitrag zu a_μ^{LbL}

Um zu untersuchen welchen Beitrag die einzelnen Funktionen in 2.16 zu a_μ^{LbL} liefern, ist zunächst die Ableitung der Vierpunktfunktion nach q_τ im Limes $q \rightarrow 0$ zu berechnen. Wichtige Relationen, die für die nachfolgende Betrachtung genutzt werden, sind:

$$\frac{\delta T^{\sigma\delta}}{\delta q_\tau} = -g^{\sigma\tau} \frac{q^\delta}{q^2} - g^{\delta\tau} \frac{q^\sigma}{q^2} + 2 \frac{q^\tau q^\sigma q^\delta}{q^4} \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{q^\sigma q^\delta}{q^2} \right|_{q \rightarrow 0} = g^{\sigma\delta} \quad \Rightarrow \quad T^{\sigma\delta} \Big|_{q \rightarrow 0} = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Alle Kovarianten verschwinden wegen Gl.2.19 im Limes $q \rightarrow 0$. Deshalb tragen nur die Funktionen selbst bei, nicht aber deren Ableitungen. Die Kovarianten lassen sich, nach der Anzahl an Impulsen q_3 die außerhalb des Projektors auftreten, in drei Klassen einteilen. Für die Ableitung nach q_τ wird q_3 durch q_1 , q_2 und q ersetzt. Werden die Terme ohne zusätzliches q_3 abgeleitet, entsteht mit Gl.2.18 eine Singularität bei $q = 0$. Da die Vierpunktfunktion aber keine solchen Singularitäten haben darf, müssen die betreffenden Funktionen faktorisieren und sich q^2 ausklammern lassen. Der resultierende Term ist linear in q und wird im betrachteten Limes folglich Null. Ebenso verschwinden die Terme mit zwei zusätzlichen q_3 da sie auch nach der Ableitung noch linear in q sind. Es können also nur die 18 Kovarianten beitragen, die ein q_3 enthalten. Wird für diese die Spur in Gl.1.1 berechnet kann festgestellt werden, dass sie für den ersten durch Gl.2.17 entstehenden Term Null ist. Der dritte Term liefert den doppelten

Beitrag des zweiten.

Der für a_μ^{LbL} relevante Teil der Ableitung ist demnach

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta q_{3\tau}} \Big|_{q_3 \rightarrow 0} &= T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_2^{\nu\sigma} q_1^\tau \times g_2(3, 1, 2) + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_2^{\nu\sigma} q_2^\tau \times (g_1(1, 3, 2) - g_2(1, 3, 2)) \\
&+ T_1^{\mu\tau} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} \times g_4(1, 3, 2) + T_1^{\mu\tau} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} \times g_5(1, 2, 3) \\
&+ T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_1^{\mu\alpha} q_{1\alpha} \times (g_1(3, 2, 1) - g_2(3, 2, 1)) \\
&+ T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\rho\gamma} T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} \times g_2(3, 2, 1) + T_2^{\nu\tau} T_1^{\mu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} \times g_5(2, 1, 3) \\
&+ T_2^{\nu\tau} T_1^{\mu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} \times g_4(2, 3, 1) + T_3^{\rho\tau} T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} \times g_4(3, 1, 2) \\
&+ T_3^{\rho\tau} T_2^{\nu\sigma} T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} \times g_4(3, 2, 1) + T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} q_1^\tau \times g_6(1, 3, 2) \\
&+ T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} q_2^\tau \times (g_6(1, 3, 2) + g_7(1, 3, 2)) \\
&+ T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} q_1^\tau \times g_8(1, 3, 2) + T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} q_2^\tau \times g_6(2, 1, 3) \\
&+ T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} q_1^\tau \times g_8(1, 2, 3) + T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{1\gamma} q_2^\tau \times g_8(2, 3, 1) \\
&+ T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} q_1^\tau \times (g_6(2, 3, 1) + g_7(2, 3, 1)) \\
&+ T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} T_2^{\nu\sigma} T_3^{\rho\gamma} q_{2\gamma} q_2^\tau \times g_6(2, 3, 1)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Für diese 18 Terme ist die Spur zu berechnen und über alle Impulse zu integrieren. Dafür werden zunächst alle Kovarianten zusammengefasst, die mit der gleichen Funktion multipliziert werden. Weiterhin lässt sich die Anzahl der Terme reduzieren, indem die Symmetrie der Funktionen ausgenutzt wird. Als Beispiel dient hier der Beitrag durch

$$T_3^{\rho\tau} T_1^{\mu\sigma} T_2^{\nu\beta} q_{1\beta} \times g_4(3, 1, 2) + T_3^{\rho\gamma} T_2^{\nu\sigma} T_1^{\mu\alpha} q_{2\alpha} \times g_4(3, 2, 1) \quad .$$

Werden die beiden Terme in das Integral aus Gl.1.1 eingesetzt kann, wegen der neuen Wahl der Impulse, für den zweiten Term die Substitution $q'_1 = q_2$, $q'_2 = q_1$ durchgeführt werden ohne den Nenner im Integral zu ändern. Die beiden Integralausdrücke unterscheiden sich nur noch in der Kovariante im Integranden und werden wieder zusammengefasst. Dadurch wird nur noch eine der Funktionen $g_4(3, 1, 2)$ und $g_4(3, 2, 1)$ benötigt. Wird dies für alle Funktionen durchgeführt, die bei Vertauschung von q_1 und q_2 ineinander übergehen, enthält der Integrand nur 11 Terme mit sieben unbekanntem Funktionen.

$$\begin{aligned}
a_\mu^{LbL} &= \frac{e^6}{48m} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 - q_2)^2 ((p - q_1)^2 - m^2) ((p - q_2)^2 - m^2)} \\
&\times [B_1 g_1(3, 2, 1) + B_2 (g_1(1, 3, 2) + g_2(1, 3, 2)) + B_3 g_2(3, 1, 2) + B_4 g_4(1, 3, 2) \\
&+ B_5 g_4(3, 1, 2) + B_6 g_5(1, 2, 3) + B_7 g_6(1, 3, 2) + B_8 g_6(2, 1, 3) + B_9 g_7(1, 3, 2) \\
&+ B_{10} g_8(1, 2, 3) + B_{11} g_8(1, 3, 2)]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Die Vorfaktoren B sind Funktionen der Skalarprodukte von p , q_1 und q_2 und können dem Anhang entnommen werden.

2.3.3 Weitere Zerlegung

Es existiert noch ein weiterer Ansatz, um die Vierpunktfunktion zu vereinfachen. Melnikov und Vainshtein geben in [4] eine Zerlegung an, die nur 19 Terme beinhaltet. Der Impuls des externen Photons wird verschwindend gewählt. Anders als in [1],[3] kontrahiert Melnikov die Vierpunktfunktion mit den Polarisationen der Photonen $\epsilon_{1\mu}$, $\epsilon_{2\nu}$, $\epsilon_{3\rho}$, ϵ_σ . Die eichinvarianten Größen in Gl.2.22 sind aufgebaut aus den Fourier-Transformierten der Feldstärketensoren $f^{\mu\nu} = q^\mu \epsilon^\nu - q^\nu \epsilon^\mu$ und den Impulsen q_1 bis q_3 , dabei ist $\eta_{ij} = q_i - q_j$. Die geschweiften Klammern sind als Kontraktionen der enthaltenen lorentz-kovarianten Größen zu interpretieren. So ist zum Beispiel $\{q_1 f_1 f_2 q_1\} = q_{1\mu} f_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} f_2^{\nu\beta} q_{1\nu}$, bzw. $\{f_1 f_2\} = f_1^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} f_2^{\nu\beta}$. Weiterhin wird q nicht einfach Null gesetzt, sondern eine lineare Entwicklung durchgeführt. Wie in Gl.(2.22) zu erkennen ist, enthält jeder Term ein f und ist somit linear in q . Damit können die Koeffizienten nicht mehr von q abhängen, sondern nur von Skalarprodukten der Impulse der inneren Photonen. Mit der Beziehung $q_3 = -q_1 - q_2$ werden die Skalarprodukte $q_1 \cdot q_2$, $q_1 \cdot q_3$ und $q_2 \cdot q_3$ durch q_1^2 , q_2^2 und q_3^2 ausgedrückt. Wie schon vorher benutzt, steht hier $G^{(1,2,3)}$ für $G(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$. Die Funktionen $G_{1,2,3,4}$ sind dabei symmetrisch unter Vertauschung ihrer beiden letzten Argumente, während $\tilde{G}_{3,4}$ antisymmetrisch sind. $G_5^{(1,2,3)}$ ist symmetrisch unter Vertauschung zweier beliebiger Argumente [4].

$$\begin{aligned}
A(q_1, q_2, q_3) &= \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \epsilon_{3\rho} \epsilon_\sigma A^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \{f f_1\} \{f_2 f_3\} G_1^{(1,2,3)} + \{f f_2\} \{f_1 f_3\} G_1^{(2,1,3)} + \{f f_3\} \{f_1 f_2\} G_1^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{f \tilde{f}_1\} \{f_2 \tilde{f}_3\} G_2^{(1,2,3)} + \{f \tilde{f}_2\} \{f_1 \tilde{f}_3\} G_2^{(2,1,3)} + \{f \tilde{f}_3\} \{f_1 \tilde{f}_2\} G_2^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{\eta_{23} f f_1 \eta_{23}\} \{f_2 f_3\} G_3^{(1,2,3)} + \{\eta_{31} f f_2 \eta_{31}\} \{f_1 f_3\} G_3^{(2,1,3)} \\
&\quad + \{\eta_{12} f f_3 \eta_{12}\} \{f_1 f_2\} G_3^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{\eta_{23} f f_1 q_1\} \{f_2 f_3\} \tilde{G}_3^{(1,2,3)} + \{\eta_{31} f f_2 p_2\} \{f_1 f_3\} \tilde{G}_3^{(2,1,3)} \\
&\quad + \{\eta_{12} f f_3 q_3\} \{f_1 f_2\} \tilde{G}_3^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{\eta_{23} f f_1 \eta_{23}\} \{q_2 f_2 \eta_{31}\} \{q_3 f_3 \eta_{12}\} G_4^{(1,2,3)} + \{\eta_{31} f f_2 \eta_{31}\} \{q_1 f_1 \eta_{23}\} \{q_3 f_3 \eta_{12}\} G_4^{(2,1,3)} \\
&\quad + \{\eta_{12} f f_3 \eta_{12}\} \{q_1 f_1 \eta_{23}\} \{q_2 f_2 \eta_{31}\} G_4^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{q_1 f f_1 q_1\} \{q_2 f_2 \eta_{31}\} \{q_3 f_3 \eta_{12}\} \tilde{G}_4^{(1,2,3)} + \{q_2 f f_2 q_2\} \{q_1 f_1 \eta_{23}\} \{q_3 f_3 \eta_{12}\} \tilde{G}_4^{(2,1,3)} \\
&\quad + \{q_3 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 \eta_{23}\} \{q_2 f_2 \eta_{31}\} \tilde{G}_4^{(3,1,2)} \\
&\quad + \{q_1 f q_3\} \{q_1 f_1 \eta_{23}\} \{q_2 f_2 \eta_{31}\} \{q_3 f_3 \eta_{12}\} G_5^{(1,2,3)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Zunächst wurde versucht zu zeigen, dass diese Zerlegung äquivalent ist zu der allgemeinen Kovariantenzerlegung mit 138 Termen. Dazu wurde Gl.2.12 mit den 4 Polarisierungen der Photonen multipliziert und in Gl.2.22 wurde q durch q_1 , q_2 und q_3 ersetzt. Anschließend wurde ein Koeffizientenvergleich durchgeführt, der erfolgreich alle Koeffizienten Π durch die G darstellen konnte. Um diese Zerlegung nachzuvollziehen, wird auch hier versucht sich ein Objekt zu konstruieren, das die geforderten Eigenschaften erfüllt und anschließend mit der gegebenen Zerlegung verglichen. Zunächst wird gefordert, dass die Größe linear in q ist. Das wird erreicht indem die gesamte Abhängigkeit von q im Feldstärketensor $f^{\sigma\delta}$ liegen soll. Außerdem wird die Gültigkeit der Ward-Identität gefordert, was dazu führt, dass die Funktion $A^{\mu\nu\rho\sigma}$ wieder mit dem Produkt aus $T_1^{\mu\alpha}$, $T_2^{\nu\beta}$ und $T_3^{\rho\gamma}$ geschrieben werden kann. Die Projektoren werden mit den Polarisierungen der inneren Photonen kontrahiert. Es gibt bis dahin noch fünf freie Lorentz-Indizes. Diese werden nun mit entsprechende metrischen Tensoren und den drei nicht verschwindenden Impulsen kontrahiert, wobei durch der Ward-Identität und Impulserhaltung für jeden Projektor nur ein Impuls übrig bleibt. Bei der Kontraktion des Feldstärketensors $f^{\sigma\delta}$ mit zwei Impulsen, hier sind q_1 und q_2 gewählt, muss beachtet werden, dass auf Grund der Antisymmetrie des Tensors das Produkt mit zwei gleichen Impulsen, beispielsweise $q_{1\sigma}f^{\sigma\delta}q_{1\delta}$, immer Null ergibt. Da die Vertauschung der beiden Impulse nur zu einem Wechsel des Vorzeichens führt, bleibt nur eine Möglichkeit für die Kontraktion mit zwei Impulsen. Dazu kommen noch sechs mögliche Kontraktionen mit einem metrischen Tensor und einem Impuls und drei mit zwei metrischen Tensoren. Insgesamt erhält man so die in Gl.2.23 gegebenen 19 unabhängigen Terme.

$$\begin{aligned}
 A(q_1, q_2, q_3) &= \epsilon_{1\mu}\epsilon_{2\nu}\epsilon_{3\rho}f^{\sigma\delta}X_{\sigma\delta}^{\mu\nu\rho} \\
 X_{\sigma\delta}^{\mu\nu\rho} &= q_{1\sigma}q_{2\delta} \left(T_1^{\mu\alpha}q_{2\alpha}T_2^{\nu\beta}q_{1\beta}T_3^{\rho\gamma}q_{1\gamma}K_1 + T_1^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}T_2^{\nu\beta}T_3^{\rho\gamma}q_{1\gamma}K_2 \right. \\
 &\quad \left. + T_1^{\mu\alpha}g_{\alpha\gamma}T_3^{\rho\gamma}T_2^{\nu\beta}q_{1\beta}K_3 + T_1^{\mu\alpha}q_{2\alpha}T_2^{\nu\beta}g_{\beta\gamma}T_3^{\rho\gamma}K_4 \right) \\
 &\quad + \{q_{1\sigma}, q_{2\sigma}\}g_{\alpha\delta} \left(T_1^{\mu\alpha}T_2^{\nu\beta}q_{1\beta}T_3^{\rho\gamma}q_{1\gamma}L_{1\{1,2\}} + T_1^{\mu\alpha}T_2^{\nu\beta}g_{\beta\gamma}T_3^{\rho\gamma}L_{2\{1,2\}} \right) \\
 &\quad + \{q_{1\sigma}, q_{2\sigma}\}g_{\beta\delta} \left(T_2^{\nu\beta}T_1^{\mu\alpha}q_{2\alpha}T_3^{\rho\gamma}q_{1\gamma}L_{3\{1,2\}} + T_2^{\nu\beta}T_1^{\mu\alpha}g_{\alpha\gamma}T_3^{\rho\gamma}L_{4\{1,2\}} \right) \\
 &\quad + \{q_{1\sigma}, q_{2\sigma}\}g_{\gamma\delta} \left(T_3^{\rho\gamma}T_1^{\mu\alpha}q_{2\alpha}T_2^{\nu\beta}q_{1\beta}L_{5\{1,2\}} + T_3^{\rho\gamma}T_1^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta}T_2^{\nu\beta}L_{6\{1,2\}} \right) \\
 &\quad + g_{\sigma\alpha}g_{\beta\delta}T_1^{\mu\alpha}T_2^{\nu\beta}T_3^{\rho\gamma}q_{1\gamma}M_1 + g_{\sigma\beta}g_{\gamma\delta}T_2^{\nu\beta}T_3^{\rho\gamma}T_1^{\mu\alpha}q_{2\alpha}M_2 \\
 &\quad + g_{\sigma\gamma}g_{\alpha\delta}T_3^{\rho\gamma}T_1^{\mu\alpha}T_2^{\nu\beta}q_{1\beta}M_3
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wird für die T eine andere Normierung gewählt

$$T^{\sigma\delta}(q) = q^2g^{\sigma\delta} - q^\sigma q^\delta$$

lässt sich eine Beziehung zwischen den Projektoren¹ und den Feldstärketensoren finden

$$\epsilon_\sigma T^{\sigma\delta} = q_\sigma f^{\sigma\delta} \quad . \quad (2.24)$$

Damit und mit den in Gl.2.22 benutzten Klammern kann Gl.2.23 umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} A(q_1, q_2, q_3) = & \{q_1 f q_2\} \{q_1 f_1 q_2\} \{q_2 f_2 q_1\} \{q_3 f_3 q_1\} K_1 + \{q_1 f q_2\} \{q_1 f_1 f_2 q_2\} \{q_3 f_3 q_1\} K_2 \\ & + \{q_1 f q_2\} \{q_1 f_1 f_3 q_3\} \{q_2 f_2 q_1\} K_3 + \{q_1 f q_2\} \{q_2 f_2 f_3 q_3\} \{q_1 f_1 q_2\} K_4 \\ & + \{q_1 f f_1 q_1\} \{q_2 f_2 q_1\} \{q_3 f_3 q_1\} L_{11} + \{q_2 f f_1 q_1\} \{q_2 f_2 q_1\} \{q_3 f_3 q_1\} L_{12} \\ & + \{q_1 f f_1 q_1\} \{q_2 f_2 f_3 q_3\} L_{21} + \{q_2 f f_1 q_1\} \{q_2 f_2 f_3 q_3\} L_{22} \\ & + \{q_1 f f_2 q_2\} \{q_1 f_1 q_2\} \{q_3 f_3 q_1\} L_{31} + \{q_2 f f_2 q_2\} \{q_1 f_1 q_2\} \{q_3 f_3 q_1\} L_{32} \\ & + \{q_1 f f_2 q_2\} \{q_1 f_1 f_3 q_3\} L_{41} + \{q_2 f f_2 q_2\} \{q_1 f_1 f_3 q_3\} L_{42} \\ & + \{q_1 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 q_2\} \{q_2 f_2 q_1\} L_{51} + \{q_2 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 q_2\} \{q_2 f_2 q_1\} L_{52} \\ & + \{q_1 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 f_2 q_2\} L_{61} + \{q_2 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 f_2 q_2\} L_{62} \\ & + \{q_1 f_1 f f_2 q_2\} \{q_3 f_3 q_1\} M_1 + \{q_2 f_2 f f_3 q_3\} \{q_1 f_1 q_2\} M_2 + \{q_1 f_1 f f_3 q_3\} \{q_2 f_2 q_1\} M_3 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dieser Ausdruck ähnelt Gl.2.22 schon sehr und die Äquivalenz lässt sich wieder durch einen Koeffizientenvergleich zeigen, bei dem die Beziehung $q_3 = -q_1 - q_2$ ausgenutzt wird. So ist zu sehen, dass beispielsweise $K_1 = 8G_5^{(1,2,3)}$, es muss im letzten Term von Gl.2.22 nur der überzählige Impuls in η ersetzt werden.

2.4 Pion-Austausch

Der dominante Anteil der hadronischen Light-by-Light-Streuung ist der Pion-Pol-Beitrag, dargestellt in Abb.2.5 .

Der Pion-Formfaktor ist definiert über [8]

$$i \int d^4x e^{ix \cdot q} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | \pi^0 \rangle = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^\alpha p^\beta F_{\pi^0\gamma\gamma}(q^2, (p-q)^2) \quad (2.26)$$

Damit lassen sich die drei Beiträge schreiben als

¹durch die Umnormierung sind die T natürlich keine Projektoren mehr, werden aber der Einfachheit halber als solche bezeichnet

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q_3) &= \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2)F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_3^2, (q_1 + q_2 + q_3)^2)}{(q_1 + q_2)^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_{1\alpha} q_{2\beta} \epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta} q_{3\gamma} (q_{1\delta} + q_{2\delta}) \\
&+ \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, (q_1 + q_2 + q_3)^2)F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_2^2, q_3^2)}{(q_2 + q_3)^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\delta} q_{1\alpha} (q_{2\delta} + q_{3\delta}) \epsilon^{\nu\rho\beta\gamma} q_{2\beta} q_{3\gamma} \quad (2.27) \\
&+ \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, q_3^2)F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_2^2, (q_1 + q_2 + q_3)^2)}{(q_1 + q_3)^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\rho\alpha\gamma} q_{1\alpha} q_{3\gamma} \epsilon^{\nu\sigma\beta\delta} q_{2\beta} (q_{1\delta} + q_{3\delta})
\end{aligned}$$

Dabei wurde der äußere Impuls ersetzt durch $q = q_1 + q_2 + q_3$ und beachtet, dass zwei gleiche Impulse, die mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor kontrahiert werden, Null ergeben.

Für die Berechnung von a_μ^{LbL} ist die Ableitung der Vierpunktfunktion im Limes $q \rightarrow 0$ zu bestimmen

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(q_1, q_2, q - q_1 - q_2)}{\delta q_\tau} \right|_{q=0} &= \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2)F_{\pi^0\gamma\gamma}((q_1 + q_2)^2, 0)}{(q_1 + q_2)^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_{1\alpha} q_{2\beta} \epsilon^{\rho\sigma\gamma\tau} (q_{1\gamma} + q_{2\gamma}) \\
&+ \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, 0)F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_2^2, (q_1 + q_2)^2)}{q_1^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\tau} q_{1\alpha} \epsilon^{\nu\rho\beta\gamma} q_{2\beta} (q_{1\gamma} + q_{2\gamma}) \\
&+ \frac{F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_1^2, (q_1 + q_2)^2)F_{\pi^0\gamma\gamma}(q_2^2, 0)}{q_2^2 + m_\mu^2} \epsilon^{\mu\rho\alpha\gamma} q_{1\alpha} (q_{1\gamma} + q_{2\gamma}) \epsilon^{\nu\sigma\beta\tau} q_{2\beta} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Der erste und der zweite Term liefern den Gleichen Beitrag zu a_μ^{LbL} . Dafür ist nur die Ersetzung $q_1 \rightarrow q_1 + q_2$ vorzunehmen und zu beachten, dass sich der Formfaktor auf Grund der Bose-Symmetrie nicht ändert, wenn seine Argumente vertauscht werden. Das dritte Diagramm gibt einen anderen Beitrag [8].

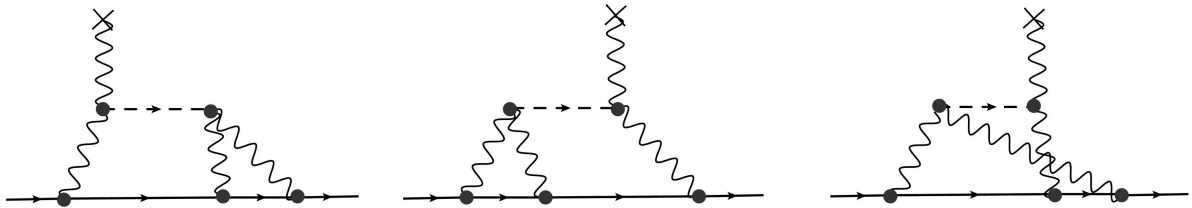


Abbildung 2.5: Hadronische Light-by-Light-Beiträge durch Pion-Austausch. Die gestrichene Linie repräsentiert ein Pion, alle Photonlinien sind einlaufend gewählt, wobei das äußere Photon einen verschwindenden Impuls haben soll. Der erste und zweite Graph liefern identische Beiträge.

$$\begin{aligned}
a_\mu^{LbL} = & -e^6 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2 ((p + q_1)^2 - m^2) ((p - q_2)^2 - m^2)} \\
& \times \left(\frac{F_{\pi^0 \gamma \gamma}(q_1^2, (q_1 + q_2)^2) F_{\pi^0 \gamma \gamma}(q_2^2, 0)}{q_2^2 + m_\mu^2} T_1(p, q_1, q_2) \right. \\
& \left. + \frac{F_{\pi^0 \gamma \gamma}(q_1^2, q_2^2) F_{\pi^0 \gamma \gamma}((q_1 + q_2)^2, 0)}{(q_1 + q_2)^2 + m_\mu^2} T_2(p, q_1, q_2) \right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Der Term mit T_1 gehört zu den beiden ersten Diagrammen, der Term mit T_2 zum dritten. Die Herleitung von T_1 und T_2 umfasst zwei Schritte. Zunächst wird eine Umbenennung der Variablen vorgenommen.

$$\begin{aligned}
q_1 & \rightarrow -q_1 \\
q_2 & \rightarrow -q_3 = q_1 + q_2 \\
q_3 & \rightarrow -q_2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dadurch geht der Nenner in Gl.(1.1) über in den in Gl.(2.29)

$$((p - q_1)^2 - m_\mu^2) ((p - q_1 - q_2)^2 - m_\mu^2) \rightarrow ((p + q_1)^2 - m_\mu^2) ((p - q_2)^2 - m_\mu^2) \quad . \tag{2.31}$$

Außerdem gibt es einen Vorzeichenwechsel im Integral, da $dq_1 dq_2 \rightarrow -dq_1 dq_2$. Nach dieser Transformation ergibt die Spur für die ersten zwei Terme in Gl.(2.28), unter Beachtung von $p^2 = m_\mu^2$, wie in [7],[8],[9]

$$\begin{aligned}
T_1(p, q_1, q_2) = & \frac{16}{3}(p \cdot q_1)(p \cdot q_2)((q_1 \cdot q_1) - \frac{16}{3}(p \cdot q_2)^2 q_1^2 - \frac{16}{3}(p \cdot q_2)(q_1 \cdot q_2)^2 \\
& - \frac{8}{3}(p \cdot q_1)(q_1 \cdot q_2)q_1^2 + 8(p \cdot q_2)q_1^2 q_2^2 \\
& + \frac{16}{3}m_\mu^2 q_1^2 q_2^2 - \frac{16}{3}m_\mu^2 (q_1 \cdot q_2)^2 \quad .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Für T_2 folgt nach diesen Ersetzungen ein noch etwas länglicher Ausdruck

$$\begin{aligned}
T_2(p, q_1, q_2) = & \frac{16}{3}(p \cdot q_1)(p \cdot q_2)(q_1 \cdot q_1) - \frac{8}{3}(p \cdot q_2)^2 q_1^2 - \frac{8}{3}(p \cdot q_1)^2 q_2^2 \\
& + \frac{4}{3}(p \cdot q_1)q_1^2 q_2^2 - \frac{4}{3}(p \cdot q_2)q_1^2 q_2^2 \\
& + \frac{4}{3}(p \cdot q_1)(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2 - \frac{4}{3}(p \cdot q_2)(q_1 \cdot q_2)^2 q_1^2 \\
& + \frac{8}{3}m_\mu^2 q_1^2 q_2^2 - \frac{8}{3}m_\mu^2 (q_1 \cdot q_2)^2 \quad .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Wie aber festgestellt werden kann, liefern die Terme mit Vorfaktor $\frac{8}{3}$ und je zwei Terme mit $\frac{4}{3}$ den gleichen Beitrag im Integral. So gehen sie in einem zweiten Schritt ineinander über, indem

q_1 mit $-q_2$ vertauscht wird. Damit ergibt sich das in [7],[8],[9] angegebene Ergebnis

$$\begin{aligned} T_2(p, q_1, q_2) = & \frac{16}{3}(p \cdot q_1)(p \cdot q_2)(q_1 \cdot q_1) - \frac{16}{3}(p \cdot q_1)^2 q_2^2 \\ & + \frac{8}{3}(p \cdot q_1) q_1^2 q_2^2 + \frac{8}{3}(p \cdot q_1)(q_1 \cdot q_2)^2 q_2^2 \\ & + \frac{8}{3} m_\mu^2 q_1^2 q_2^2 - \frac{8}{3} m_\mu^2 (q_1 \cdot q_2)^2 \quad . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Alle Berechnungen wurden mit dem Mathematica-Paket TRACER durchgeführt und mit REDUCE abgeglichen.

3 Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, dass sich die Vierpunktfunktion der hadronischen Light-by-Light-Streuung unter Ausnutzung weniger Bedingungen auf eine recht einfache Form bringen lässt. Die Zahl der linear unabhängigen Terme hat sich dabei von ursprünglich 138 auf gerade einmal 43 reduziert. Durch Symmetrieüberlegungen wurde gezeigt, dass nicht alle ihre Koeffizienten unabhängig sind, sondern ihnen tatsächlich nur neun verschiedene Funktionen zu Grunde liegen. Zu a_μ^{LbL} tragen aber nur die Kovarianten bei, die linear sind im Impuls des Photon, das an das Feld koppelt. Alle anderen verschwinden in der Ableitung der Vierpunktfunktion, wenn man diesen Impuls gegen Null schickt. Von den gefundenen neun Funktionen sind deshalb nur noch sieben relevant um a_μ^{LbL} zu berechnen.

Die weitere Vereinfachung auf nur 19 Terme, wie sie von Melnikov und Vainshtein ([4]) durchgeführt wurde, konnte soweit nachvollzogen werden, dass die Anzahl an Termen bestätigt wurde. Dass es nur sieben verschiedene Funktionen, mit den entsprechenden Permutationen ihrer Argumente, als Koeffizienten gibt und dass sie die angegebenen Symmetrieeigenschaften haben konnte, mit der hier beschriebenen Herangehensweise, jedoch nicht bestätigt werden und bedarf daher noch weiterer Untersuchung.

Im letzten Teil der Arbeit wurde dargelegt, wie die Spur für die Vierpunktfunktion des Pion-Pol-Beitrags der Light-by-Light-Streuung berechnet wird und mit geeigneten Substitutionen der Impulse die Faktoren T_1 und T_2 aus [7] und [8] erhalten werden.

A Anhang

Hier wird die explizite Form der Faktoren B_i aus Gl.2.21 angegeben. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen werden für die Skalarprodukte folgende Kurznotationen eingeführt:

$$s_1 = q_1^2, \quad s_2 = q_2^2, \quad s_3 = (q_1 - q_2)^2, \quad s_{12} = q_1 \cdot q_2, \quad t_1 = p \cdot q_1, \quad t_2 = p \cdot q_2$$

$$\begin{aligned} B_1 = & 4m^2 s_1 - 4t_1^2 + 6t_2 s_1 - 6t_1 s_{12} - 4 \frac{t_2^2 s_1}{s_2} + 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_2} - 2 \frac{t_2 s_1^2}{s_3} + 2 \frac{t_1 s_1 s_{12}}{s_3} + 2 \frac{t_2 s_1 s_{12}}{s_3} \\ & - 2 \frac{t_1 s_{12}^2}{s_3} + 4 \frac{t_1 t_2 s_1}{s_3} - 4 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_3} - 4 \frac{t_2^2 s_1 s_{12}}{s_2 s_3} + 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_2 s_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & -4m^2 s_2 + 4t_2^2 + 6t_2 s_{12} - 6t_1 s_2 - 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_1} + 4 \frac{t_1^2 s_2}{s_1} + 4 \frac{t_2^2 s_{12}}{s_3} + 2 \frac{t_2 s_{12}^2}{s_3} - 4 \frac{t_1 t_2 s_2}{s_3} \\ & - 2 \frac{t_1 s_2 s_{12}}{s_3} - 2 \frac{t_2 s_2 s_{12}}{s_3} + 2 \frac{t_1 s_2^2}{s_3} - 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}^2}{s_1 s_3} + 4 \frac{t_1^2 s_2 s_{12}}{s_1 s_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 = & 8m^2 s_{12} - 4m^2 s_2 + 4t_2^2 - 12t_2 s_1 + 12t_1 s_{12} + 6t_2 s_{12} - 8 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_1} - 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_1} + 4 \frac{t_1^2 s_2}{s_1} \\ & - 8 \frac{t_2^2 s_1}{s_3} + 16 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_3} + 4 \frac{t_2^2 s_{12}}{s_3} - 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_3} - 4 \frac{t_2 s_1 s_{12}}{s_3} + 4 \frac{t_1 s_{12}^2}{s_3} + 2 \frac{t_2 s_{12}^2}{s_3} - 4 \frac{t_1 t_2 s_2}{s_3} \\ & + 4 \frac{t_2 s_1 s_2}{s_3} - 6 \frac{t_1 s_2 s_{12}}{s_3} - 2 \frac{t_2 s_2 s_{12}}{s_3} + 2 \frac{t_1 s_2^2}{s_3} - 8 \frac{t_1^2 s_{12}^2}{s_1 s_3} - 4 \frac{t_1 t_2 s_{12}^2}{s_1 s_3} + 4 \frac{t_1^2 s_2 s_{12}}{s_1 s_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 = & 8t_1 t_2 + 8t_2 s_1 + 4t_1 s_{12} - 8 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_1} - 8 \frac{t_2 s_1^2}{s_3} + 8 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_3} - 4 \frac{t_1 s_1 s_{12}}{s_3} + 12 \frac{t_2 s_1 s_{12}}{s_3} \\ & + 4 \frac{t_1 s_{12}^2}{s_3} - 4 \frac{t_2 s_{12}^2}{s_3} + 8 \frac{t_1 s_1 s_2}{s_3} - 8 \frac{t_1 s_2 s_{12}}{s_3} - 8 \frac{t_1^2 s_{12}^2}{s_1 s_3} - 8 \frac{t_2^2 s_1 s_{12}}{s_2 s_3} + 8 \frac{t_2^2 s_{12}^2}{s_2 s_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 = & 24t_1^2 + 8t_1 t_2 - 8 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_1} - 24 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_2} - 8 \frac{t_1 t_2 s_1}{s_3} + 4 \frac{t_2 s_1^2}{s_3} + 8 \frac{t_1^2 s_{12}}{s_3} + 16 \frac{t_1 t_2 s_{12}}{s_3} \\ & - 4 \frac{t_1 s_1 s_{12}}{s_3} - 8 \frac{t_2 s_1 s_{12}}{s_3} + 4 \frac{t_1 s_{12}^2}{s_3} - 8 \frac{t_1^2 s_2}{s_3} + 4 \frac{t_1 s_1 s_2}{s_3} - 4 \frac{t_1 s_2 s_{12}}{s_3} + 4 \frac{t_2^2 s_1 s_{12}}{s_2 s_3} \\ & - 8 \frac{t_1 t_2 s_{12}^2}{s_2 s_3} - 8 \frac{t_2^2 s_{12}^2}{s_2 s_3} \end{aligned}$$

$$B_6 = 8t_1t_2 + 4t_1s_{12} + 8t_1s_2 - 8\frac{t_2^2s_{12}}{s_2} + 8\frac{t_2^2s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_2s_1s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_1s_{12}^2}{s_3} + 4\frac{t_2s_{12}^2}{s_3} \\ + 8\frac{t_2s_1s_{12}}{s_3} + 12\frac{t_1s_2s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_2s_2s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_1s_2^2}{s_3} + 8\frac{t_1^2s_{12}^2}{s_1s_3} - 4\frac{t_1^2s_2s_{12}}{s_1s_3} - 8\frac{t_2^2s_{12}^2}{s_2s_3}$$

$$B_7 = -4t_2s_1^2 + 4t_1s_1s_{12} - 4t_2s_1s_{12} + 4t_1s_1s_2 - 8\frac{t_1t_2s_1^2}{s_3} + 4\frac{t_2s_1^3}{s_3} + 8\frac{t_1^2s_1s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_1t_2s_1s_{12}}{s_3} \\ - 4\frac{t_1s_1^2s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_2s_1^2s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_1^2s_{12}^2}{s_3} + 16\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_1s_1s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_2s_1s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_1s_1^3}{s_3} + 4\frac{t_2s_1^3}{s_3} \\ + 8\frac{t_1^2s_1s_2}{s_3} - 4\frac{t_1s_1^2s_2}{s_3} - 8\frac{t_1^2s_2s_{12}}{s_3} + 8\frac{t_1s_1s_2s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_1s_2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_2^2s_1^2s_{12}}{s_2s_3} - 8\frac{t_1t_2s_1s_{12}^2}{s_2s_3} \\ + 8\frac{t_1t_2s_1^3}{s_2s_3} - 8\frac{t_2^2s_1^3}{s_2s_3}$$

$$B_8 = 2t_1s_2s_{12} + 4t_1^2s_2 - 8t_1t_2s_{12} - 2t_2s_{12} + 4\frac{t_2^2s_{12}^2}{s_2} - 8\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_2^2s_{12}^2}{s_3} + 2\frac{t_2s_1s_{12}^2}{s_3} \\ - 2\frac{t_2s_{12}^3}{s_3} + 4\frac{t_2^2s_{12}^2}{s_3} + 4\frac{t_1^2s_2s_{12}}{s_3} + 8\frac{t_1t_2s_2s_{12}}{s_3} - 2\frac{t_1s_1s_2s_{12}}{s_3} - 2\frac{t_2s_1s_2s_{12}}{s_3} + 2\frac{t_1s_2s_{12}^2}{s_3} \\ + 2\frac{t_2s_2s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_1^2s_2^2}{s_3} + 4\frac{t_1s_1s_2^2}{s_3} - 2\frac{t_1s_2^2s_{12}}{s_3} + 4\frac{t_2^2s_{12}^3}{s_2s_3}$$

$$B_9 = 4t_2s_1s_{12} - 4t_1s_1s_2 + 16\frac{t_1t_2s_1s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_2s_1^2s_{12}}{s_3} - 16\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_2s_1s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_2s_{12}^3}{s_3} \\ - 8\frac{t_1^2s_1s_2}{s_3} + 4\frac{t_1s_1^2s_2}{s_3} + 8\frac{t_1^2s_2s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_1s_1s_2s_{12}}{s_3} + 4\frac{t_1s_2s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_2^2s_1s_{12}^2}{s_2s_3} + 8\frac{t_2^2s_{12}^3}{s_2s_3}$$

$$B_{10} = 8t_1t_2s_{12} - 4t_1^2s_1 - 2t_2s_1s_{12} + 2t_1s_{12}^2 - 4\frac{t_1^2s_{12}^2}{s_1} + 4\frac{t_2^2s_1^2}{s_3} - 8\frac{t_1t_2s_1s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_2^2s_1s_{12}}{s_3} \\ + 2\frac{t_2s_1^2s_{12}}{s_3} + 4\frac{t_1^2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_3} - 2\frac{t_1s_1s_{12}^2}{s_3} - 2\frac{t_2s_1s_{12}^2}{s_3} + 2\frac{t_1s_{12}^3}{s_3} - 2\frac{t_2s_1^2s_2}{s_3} \\ + 2\frac{t_1s_1s_2s_{12}}{s_3} + 2\frac{t_2s_1s_2s_{12}}{s_3} - 2\frac{t_1s_2s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_1^2s_{12}^3}{s_1s_3}$$

$$B_{11} = 8t_1^2s_{12} - 8t_1t_2s_1 - 4t_2s_1s_{12} + 4t_1s_1^3 + 8\frac{t_2^2s_1s_{12}}{s_2} - 8\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_2} - 8\frac{t_1t_2s_1s_{12}}{s_3} - 8\frac{t_2^2s_1s_{12}}{s_3} \\ + 4\frac{t_2s_1^2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_1^2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_1t_2s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_1s_1s_{12}^2}{s_3} - 4\frac{t_2s_1s_{12}^2}{s_3} + 4\frac{t_1s_{12}^3}{s_3} + 8\frac{t_1t_2s_1s_2}{s_3} \\ + 4\frac{t_2s_1s_2s_{12}}{s_3} - 4\frac{t_1s_2s_{12}^2}{s_3} + 8\frac{t_2^2s_1s_{12}^2}{s_2s_3} - 8\frac{t_1t_2s_{12}^3}{s_2s_3}$$

Literaturverzeichnis

- [1] *Johan Bijnens, Elisabetta Pallante, Joaquim Prades*, Analysis of the Hadronic Light-by-Light Contributions to the Muon $g - 2$, [<http://arXiv.org/hep-ph/9511388>]
- [2] *Johan Bijnens, Joaquim Prades*, The Hadronic Light-by-Light Contribution to the Muon Anomalous Magnetic Moment: Where Do We Stand? , [<http://arXiv.org/abs/hep-ph/0702170v1>]
- [3] *Mehran Zahiri Abyaneh*, The Anatomy of the Pion Loop Hadronic Light by Light Scattering Contribution to the Muon Magnetic Anomaly , [<http://arXiv.org/hep-ph/1208.2554v1>]
- [4] *Kirill Melnikov, Arkady Vainshtein*, Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited , [<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0312226>]
- [5] *G.W. Bennett, et. al.*, Measurement of the Negative Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.7 ppm , [<http://arxiv.org/abs/hep-ex/0401008>]
- [6] *James P. Miller, Eduardo de Rafael, B. Lee Roberts*, Muon ($g - 2$): Experiment and Theory [<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0703049>]
- [7] *Andreas Nyffeler*, Hadronic light-by-light scattering in the muon $g - 2$: a new short-distance constraint on pion exchange , [<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0901.1172v2>]
- [8] *Mark Knecht, Andreas Nyffeler*, Hadronic light-by-light corrections to the muon $g - 2$: The pion-pole contribution , [<http://arXiv.org/abs/hep-ph/0111058v2>]
- [9] *Fred Jegerlehner, Andreas Nyffeler*, The Muon $g-2$, [<http://arXiv.org/abs/hep-ph/0902.3360v1>]

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit im Rahmen der Betreuung am Institut für Kern- und Teilchenphysik ohne unzulässige Hilfe Dritter verfasst und alle Quellen als solche gekennzeichnet habe.

Patrick Kneschke
Dresden, Juni 2013