

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Anatomie der hadronischen Light-by-Light-Beiträge zu $(g-2)$ des Myons

Bachelor-Arbeit
zur Erlangung des Hochschulgrades
Bachelor of Science
im Bachelor-Studiengang Physik

vorgelegt von

Tom Steudtner
geboren am 21.08.1991 in Löbau

Institut für Kern- und Teilchenphysik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden
2013

Eingereicht am 04.Juni 2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger
2. Gutachter: Prof. Dr. Michael Kobel

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Beitrag des störungstheoretisch nicht zugänglichen hadronischen Light-by-Light Prozesses zum anomalen magnetischen Moment des Myons mittels Kovarianzenzerlegung der Vierpunktfunktion untersucht. Es wurde dabei eine konkrete Darstellung der Zerlegung entwickelt, welche mit anderen Zerlegungen verglichen und durch Symmetrie- und Beitragsargumente auf eine Minimalform reduziert wurde. Schließlich wurden die einzelnen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment so weit wie allgemein möglich berechnet. Weiterhin wurde der Beitrag des Austauschs eines neutralen Pions bestätigt, und der eines allgemeinen skalaren Austausches berechnet.

Abstract

In this paper, the contribution of the non-perturbative hadronic light-by-light process to the muon anomalous magnetic moment is analyzed by means of decomposition of the four-point-function into covariants. A concrete representation of the composition has been developed, compared to previous approaches, and reduced to a minimal extend by symmetry and contribution arguments. Finally the contribution to the anomalous magnetic moment has been calculated as far as general possible. Furthermore, the neutral pion exchange contribution was confirmed, and a general scalar exchange contribution has been calculated.

Inhaltsverzeichnis

Motivation	1
Hauptteil	2
1 Light-by-Light Prozess und Vierpunktfunktion	2
2 Kovariantenzerlegung der Vierpunktfunktion	3
3 Symmetriebetrachtung	6
4 Näherung für verschwindenden Kopplungsimpuls	9
5 Beiträge zum anomalen magnetischen Moment	15
6 Bestätigung des π^0 -Pol-Beitrags	18
7 Berechnung des skalaren Austauschbeitrags	21
Zusammenfassung	23
Quellenverzeichnis	24

Motivation

Das anomale magnetische Moment des Myons wird hervorgerufen durch die Abweichung des gyromagnetischen Faktors des Spins dieses Teilchens vom Wert 2. Diese Korrektur entsteht durch Quantenfluktuationen bei der Ankopplung an das Magnetfeld, solche Prozesse sind im Standardmodell mit Potenzen des Verhältnisses zwischen den Massen der Leptonen und der virtuellen Teilchen unterdrückt bzw. gefördert für Massenbereiche oberhalb bzw. unterhalb der Leptonenmasse [6]. Daher sind exotischere Wechselwirkungen mit größeren Impulsüberträgen beim Myon auch wahrscheinlicher als bei dem leichteren Elektron. Der während des E821 Experiments am Brookhaven National Laboratory bestimmte Wert von $(g - 2)/2$ lautet [7]:

$$a_\mu = (11659208.0 \pm 6.3) \times 10^{-10} \quad (0.1)$$

Theoretische Berechnungen dieses Wertes sind schwierig, da einige Prozesse im nicht-perturbativem QCD-Bereich relevante Beiträge liefern. Ergebnisse dazu sind daher nicht unabhängig von den verwendeten Modellen und Näherungen, liegen aber alle etwa zwei bis drei Standardabweichungen unter dem experimentell bestimmten Wert. Diese Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment bietet womöglich Raum für Wechselwirkungsprozesse jenseits des Standardmodells. Um dies zu überprüfen ist jedoch eine präzise Berechnung der Vorhersage des Standardmodells unabdingbar. Dabei sind die problematischen Prozesse besonders interessant, wie hier die hadronische Light-by-Light Streuung.

Hauptteil

1 Light-by-Light Prozess und Vierpunktfunktion

Der hadronische Light-by-Light Prozess des Myons ist ein elastischer Streuprozess, bei dem dieses über drei virtuelle Photonen (Viererimpulse p_1, p_2, p_3) mit einem externen Magnetfeld wechselwirkt. Letzteres koppelt mit einem realen Photon mit Impuls p_4 . Wegen der Elastizität des Prozesses gilt zum einen, dass der Viererimpuls des Myons p erhalten bleibt, als auch dass der Impuls, welcher an das Magnetfeld koppelt, verschwindet $p_4 \rightarrow 0$. Dieser Grenzübergang soll aber erst zu einem späteren Zeitpunkt bedacht werden. Weiterhin gilt in dem gesamten Prozess noch Energie- und Impulserhaltung: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$.

Besonders kritisch am hadronischen Light-by-Light Prozess ist, dass dieser in einigen Energiebereichen für die Störungstheorie unzugänglich ist.

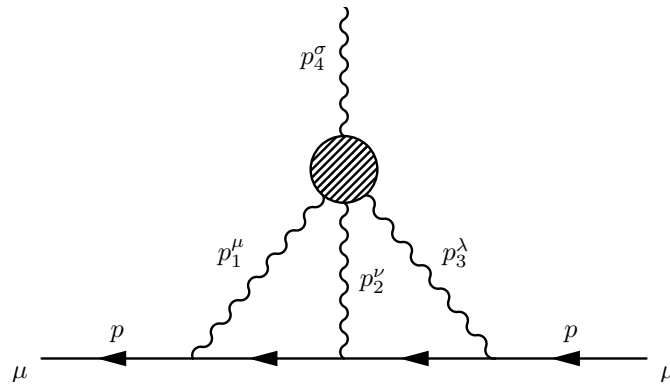


Abbildung 1.1: Hadronischer Light-by-Light Prozess

In Abb. 1.1 ist dies mit einem stark wechselwirkenden, hadronischen Blob in der Mitte gekennzeichnet, mit dem alle Photonen wechselwirken. Die relevanten Informationen über alle darin enthaltenen Prozesse lassen sich in einem unbekanntem Tensor 4. Stufe zusammenfassen, der Vierpunktfunktion:

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 e^{i(\langle p_1 x_1 \rangle + \langle p_2 x_2 \rangle + \langle p_3 x_3 \rangle)} \langle 0 | T \{ j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) j_\lambda(x_3) j_\sigma(0) \} | 0 \rangle \quad (1.1)$$

Wobei die geeckten Klammern $\langle p_i x_i \rangle$ Lorentzkontraktionen bezeichnen sollen. Mit Hilfe dieser

Vierpunktfunktion ist es möglich, den Beitrag zum anomalen magnetischen Moment des Myons zu berechnen, wenn man die Impulserhaltung und $p_4 \rightarrow 0$ annimmt:

$$\begin{aligned}
a_\mu^{LbL} &= \frac{e^6}{48 i m_\mu} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \frac{1}{(p - p_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - p_1 - p_2)^2 - m_\mu^2} \\
&\times \text{Tr} \left[(\not{p} + m_\mu) [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] (\not{p} + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p} - \not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\nu (\not{p} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\lambda \right] \\
&\times \frac{\partial}{\partial p_4^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} \Big|_{p_4=0}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Mit $a_\mu = \frac{g-2}{2}$ und p als Viererimpuls des Myons.

2 Kovariantenzerlegung der Vierpunktfunktion

Um die Lorentzinvarianz aller aus der Vierpunktfunktion abgeleiteten physikalischen Größen zu gewährleisten, muss diese selbst lorentzinvariant sein. Es ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, die Größe als Summe aus Produkten eines kovarianten Tensors mit einem Lorentzskalar auszudrücken. Da die Vierpunktfunktion außerdem nur von den Viererimpulsen der Photonen abhängen kann, und durch Impulserhaltung $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ gilt, lässt sich der tensorielle Anteil der Zerlegung durch drei der Impulse und den metrischen Tensor ausdrücken, wie vorgenommen in [2]. Listet man alle möglichen Kompositionen auf, um so einen Tensor 4. Stufe zu konstruieren, erhält man unter Ausnutzung der Symmetrierelation $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} &= \Pi^1 g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + \Pi^2 g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + \Pi^3 g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + \\
&\Pi^{1ij} g^{\mu\nu} p_i^\lambda p_j^\sigma + \Pi^{2ij} g^{\mu\lambda} p_i^\nu p_j^\sigma + \Pi^{3ij} g^{\mu\sigma} p_i^\nu p_j^\lambda + \\
&\Pi^{4ij} g^{\nu\lambda} p_i^\mu p_j^\sigma + \Pi^{5ij} g^{\nu\sigma} p_i^\mu p_j^\lambda + \Pi^{6ij} g^{\lambda\sigma} p_i^\mu p_j^\nu + \\
&\Pi^{ijkl} p_i^\mu p_j^\nu p_k^\lambda p_l^\sigma
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Wobei $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Da der metrische Tensor zwei Lorentzindizes besitzt, und jede Kontraktion mit einem Impuls wieder einen Impuls ergibt, kann es keine Terme mit ungeraden Impulszahlen geben. Die Vierpunktfunktion ist also in 138 Kovarianten entwickelbar (Bijnens et al., [2]). Diese Zahl kann allerdings noch weiter reduziert werden. Das Viererpotential A^μ der Photonen ist wegen der Eichfreiheit nur bis auf den Gradienten eines Skalars genau bestimmt:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x) \tag{2.2}$$

Durch Fourier-Transformation erhält man eine Eichfreiheit des Polarisationsvektors ε :

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu - ip^\mu \tilde{\chi}(p) \tag{2.3}$$

Wobei $\tilde{\chi}(p)$ die Fouriertransformierte von $\chi(x)$ darstellt. Die einzelnen Beiträge zur Streuamplitude $\sim \varepsilon_\mu \Pi^{\mu\dots}$ müssen aber eichunabhängig sein, folglich verschwinden alle Kontraktionen mit den jeweiligen Impulsen, was auf die Ward-Identitäten führt:

$$p_{1\mu} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = p_{2\nu} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = p_{3\lambda} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = p_{4\sigma} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = 0 \quad (2.4)$$

Es gibt also keine longitudinal polarisierten Photonen. Dadurch lassen sich die 138 auf 43 Kovarianten reduzieren (Bijnens et al., [2]). Eine konkrete und überschaubare Darstellung mittels der Kovariantenzerlegung (2.1) ist jedoch schwierig, darum wurde in dieser Arbeit eine alternative Darstellung entwickelt, welche gleichzeitig als Beweis der Aussagen aus [2] dient. Dazu wird der transversale Projektionsoperator $T_i^{\mu\nu}$ definiert:

$$T_i^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p_i^\mu p_i^\nu}{p_i^2} \quad (2.5)$$

Dieser erfüllt folgende Relationen:

$$T_i^{\mu\nu} T_{i\nu}{}^\rho = T_i^{\mu\rho} \quad (2.6)$$

$$T_i^{\mu\nu} p_{i\nu} = p_{i\mu} T_i^{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

Was dessen Projektoreigenschaften belegt. Es kann weiterhin ein longitudinalen Projektionsoperator $N_i^{\mu\nu}$ definiert werden, für den gilt:

$$N_i^{\mu\nu} = \frac{p_i^\mu p_i^\nu}{p_i^2} \quad (2.8)$$

$$N_i^{\mu\nu} N_{i\nu}{}^\rho = N_i^{\mu\rho} \quad (2.9)$$

$$N_i^{\mu\nu} p_{i\nu} = p_i^\mu \quad (2.10)$$

$$p_{i\mu} N_i^{\mu\nu} = p_i^\nu \quad (2.11)$$

und der mit dem transversalen Projektor in Relation steht.

$$N_i^{\mu\nu} + T_i^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

$$N_i^{\mu\nu} T_{i\nu\rho} = T_i^{\nu\rho} N_{i\mu\nu} = 0 \quad (2.13)$$

Nun lässt sich für die Vierpunktfunktion folgende Relation unter Verwendung der Ward-Identität (2.4) ableiten:

$$g^{\rho\mu} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = (T_1^{\rho\mu} + N_1^{\rho\mu}) \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = T_1^{\rho\mu} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} + \frac{p_1^\rho p_1^\mu}{p_1^2} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} = T_1^{\rho\mu} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (2.14)$$

Für alle anderen Impulse und Lorentzindizes ergeben sich analoge Relationen. Im Hinblick auf die konkrete Darstellung der transversalen Projektoren ist dies zwar eine triviale Aussage, aber nach Eigenschaft (2.6) sieht man, dass die Vierpunktfunktion folgende allgemeine Darstellung besitzen muss:

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} T_4^{\sigma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.15)$$

Wobei $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein beliebiger kovarianter Tensor 4. Stufe ist. Dieser kann wiederum, wie (2.1) in 138 Kovarianten zerlegt werden. Allerdings verschwinden durch die Relation (2.7) 95 davon, wenn sie mit den Projektoren kontrahiert werden. Es bleiben demnach 43 Kovarianten übrig, diese erfüllen die Ward-Identitäten automatisch, ebenfalls durch Relation (2.7).

$$p_{1\mu} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = (p_{1\mu} T_1^{\mu\alpha}) T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} T_4^{\sigma\delta} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (2.16)$$

Das selbe Kalkül ist auch auf Wechselwirkungen mit mehr oder weniger Photonen übertragbar: Die auf diese Weise erhaltenen Kovarianten sind zwar nicht immer Projektoren, erfüllen jedoch die Ward-Identitäten, und Projektoren ergeben sich aus ihren Linearkombinationen. Eine Zweipunktfunktion mit Erhaltung des photonischen Viererimpulses besitzt z.B. nur eine Kovariante: den transversalen Projektor selbst. Eine Zweipunktfunktion mit zwei Impulsen hingegen hat auch zwei Kovarianten. Anhand dieses Kalküls konnten wir folgern, dass in einer n -Punktfunktion mit n Ward-Identitäten und m unabhängigen Impulsen genau

$$N = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(m-1)^{n-2l} n!}{2^l l! (n-2l)!} \quad (2.17)$$

unabhängige Kovarianten auftreten. Unsere konkrete Darstellung der Vierpunktfunktion lautet:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = & T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} g_{\gamma\delta} T_4^{\sigma\delta} A_1 \\ & + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\lambda\gamma} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T_4^{\sigma\delta} A_2 \\ & + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T_4^{\sigma\delta} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} A_3 \\ & + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} \{p_{1\gamma}, p_{2,\gamma}\} T_4^{\sigma\delta} \{p_{1\delta}, p_{2\delta}\} B_1^{\{1,2\}\{1,2\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} \{p_{2\alpha}, p_{3\alpha}\} T_2^{\nu\beta} \{p_{1\beta}, p_{3\beta}\} T_3^{\lambda\gamma} g_{\gamma\delta} T_4^{\sigma\delta} B_2^{\{2,3\}\{1,3\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\lambda\gamma} T_2^{\nu\beta} \{p_{1\beta}, p_{3\beta}\} T_4^{\sigma\delta} \{p_{1\delta}, p_{2\delta}\} B_3^{\{1,3\}\{1,2\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} \{p_{2\alpha}, p_{3\alpha}\} T_3^{\lambda\gamma} \{p_{1\gamma}, p_{2\gamma}\} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\delta} T_4^{\sigma\delta} B_4^{\{2,3\}\{1,2\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\delta} T_4^{\sigma\delta} T_2^{\nu\beta} \{p_{1\beta}, p_{3\beta}\} T_3^{\lambda\gamma} \{p_{1\gamma}, p_{2\gamma}\} B_5^{\{1,3\}\{1,2\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} \{p_{2\alpha}, p_{3\alpha}\} T_4^{\sigma\delta} \{p_{1\delta}, p_{2\delta}\} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} B_6^{\{2,3\}\{1,2\}} \\ & + T_1^{\mu\alpha} \{p_{2\alpha}, p_{3\alpha}\} T_2^{\nu\beta} \{p_{1\beta}, p_{3\beta}\} T_3^{\lambda\gamma} \{p_{1\gamma}, p_{2,\gamma}\} T_4^{\sigma\delta} \{p_{1\delta}, p_{2\delta}\} C^{\{2,3\}\{1,3\}\{1,2\}\{1,2\}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die geschweiften Klammern $\{ \}$ enthalten Auswahlmöglichkeiten, die unabhängig voneinander sind, und zu unterschiedlichen Kovarianten führen (was sich in deren hochgestellten Indizes widerspiegelt). Die Tatsache, dass es bei den Impulsen, welche mit den Projektoren kontrahiert werden, jeweils zwei Möglichkeiten gibt, liegt an Eigenschaft (2.7), wodurch jeweils einer der vier Impulse die Kontraktion verschwinden lässt. Von den restlichen drei Impulsen kann einer wegen der Impulserhaltung durch die anderen beiden ausgedrückt werden. Wir haben dabei den Impuls p_4 ausgewählt, der die Kopplung an das Magnetfeld darstellt, wir werden später zeigen, dass die Wahl im Sinne der Ableitung in (1.2) unerheblich ist. Bei der Kontraktion mit dem Projektor $T_4^{\sigma\delta}$ verschwindet p_4 jedoch ohnehin, und es kann willkürlich ein anderer Impuls eliminiert werden, in unserem Fall p_3 .

Theoretisch wäre es nun möglich, die 138 Kovarianten aus Gleichung (2.1) durch diese 43 auszudrücken, dies würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

3 Symmetriebetrachtung

Gemäß der Definition der Vierpunktfunktion durch (1.1) muss diese unter jeder Permutation der Impulse mitsamt deren Lorentzindizes invariant bleiben. Grund dafür ist das Wirken des Zeitordnungsoperators auf die vier Ströme. Führt man eine beliebige Permutation von Impulsen und anschließend einen Koeffizientenvergleich bei der Entwicklung der Vierpunktfunktion durch, erhält man Symmetrierelationen der lorentzskalaren Koeffizienten. Für die naive Zerlegung (2.1) ergibt sich kurz gefasst folgendes Symmetrieverhalten:

$$\Pi^1(p_1, p_2, p_3) = \Pi^1(p_1, p_3, p_2) = \Pi^2(p_2, p_1, p_3) = \Pi^3(p_3, p_2, p_1) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{1\{1,2,3\}\{1,2,3\}}(p_1, p_2, p_3) &= \Pi^{1\{1,3,2\}\{1,3,2\}}(p_1, p_3, p_2) \\ &= \Pi^{2\{2,1,3\}\{2,1,3\}}(p_2, p_1, p_3) \\ &= \Pi^{3\{3,2,1\}\{3,2,1\}}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{4\{1,2,3\}\{1,2,3\}}(p_1, p_2, p_3) &= \Pi^{4\{1,3,2\}\{1,3,2\}}(p_1, p_3, p_2) \\ &= \Pi^{5\{2,1,3\}\{2,1,3\}}(p_2, p_1, p_3) \\ &= \Pi^{6\{3,2,1\}\{3,2,1\}}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Pi^{ijkl}(p_1, p_2, p_3) = \Pi^{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \quad (3.4)$$

Geschweifte Klammern $\{ \}$ stehen dabei wieder für Auswahlmöglichkeiten, wobei das Gleichheitszeichen jeweils für die Terme gilt, bei denen die Indizes sowohl in den jeweils ersten als auch zweiten Klammern an der selben Stelle stehen. Die mit einer Tilde versehenen Indizes und Impulse in der letzten Gleichung bedeuten jeweils die Permutationen $p_i \rightarrow p_j = \tilde{p}_i$, $i \rightarrow j = \tilde{i}$. Die Lorentzskalare dieser Zerlegung können mit diesen Symmetrieargumenten von 138 auf

24 verschiedene Strukturen, deren Argumente jeweils permutiert sind, reduziert werden. Eine mögliche Auswahl lautet:

$$\{\Pi^1, \Pi^{111}, \Pi^{112}, \Pi^{121}, \Pi^{122}, \Pi^{411}, \Pi^{412}, \Pi^{421}, \Pi^{422}, \Pi^{1111}, \Pi^{1112}, \Pi^{1121}, \Pi^{1122}, \Pi^{1123}, \Pi^{1211}, \Pi^{1212}, \Pi^{1221}, \Pi^{1222}, \Pi^{1223}, \Pi^{1312}, \Pi^{1321}, \Pi^{1322}, \Pi^{1323}, \Pi^{2111}\}.$$

Allerdings ist dies nicht der allgemeinste Fall, nicht nur weil bei dieser Zerlegung wie bereits diskutiert die Ward-Identitäten nicht berücksichtigt sind, sondern auch weil einer der Impulse bereits durch die anderen drei ausgedrückt wurde, wodurch nur die Hälfte der Vertauschungen möglich sind. In der Tat kann man für Zerlegung (2.18), welche ohnehin nur 43 Kovarianten enthält, diese auf nur 5 Terme mit permutierten Argumenten reduzieren, wenn man zulässt, dass diese noch von allen Impulsen abhängen, und auch in dem tensoriellen Teil der Zerlegung keine Impulse ersetzt wurden. Die Auswahl für die von uns permutierten Variablen lautet:

$$A_1(p_1, p_2, p_3, p_4) = A_1(p_1, p_2, p_4, p_3) = A_1(p_2, p_1, p_3, p_4) \quad (3.5)$$

$$B_1^{11}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{11}(p_1, p_2, p_4, p_3) \quad (3.6)$$

$$B_1^{12}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{12}(p_2, p_1, p_4, p_3) \quad (3.7)$$

$$C^{2111}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{2111}(p_1, p_2, p_4, p_3) \quad (3.8)$$

$$C^{3311}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{3311}(p_3, p_4, p_1, p_2) \quad (3.9)$$

Die übrigen Variablen konnten wir dann in folgender Weise ausdrücken:

$$A_2(p_1, p_2, p_3, p_4) = A_1(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.10)$$

$$A_3(p_1, p_2, p_3, p_4) = A_1(p_3, p_2, p_1, p_4) \quad (3.11)$$

$$B_1^{21}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{12}(p_1, p_2, p_4, p_3) \quad (3.12)$$

$$B_1^{22}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{11}(p_2, p_1, p_3, p_4) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} B_2^{21}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= B_1^{11}(p_1, p_2, p_3, p_4) + B_1^{11}(p_2, p_1, p_3, p_4) \\ &\quad + B_1^{12}(p_1, p_2, p_3, p_4) + B_1^{12}(p_2, p_1, p_4, p_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$B_2^{23}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -B_1^{11}(p_1, p_4, p_3, p_2) - B_1^{12}(p_1, p_4, p_3, p_2) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} B_2^{31}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -B_1^{11}(p_3, p_4, p_1, p_2) - B_1^{12}(p_3, p_4, p_1, p_2) \\ &= B_2^{23}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$B_2^{33}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{11}(p_3, p_4, p_1, p_2) \quad (3.17)$$

$$B_3^{11}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{11}(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.18)$$

$$B_3^{12}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -B_1^{11}(p_1, p_3, p_2, p_4) - B_1^{12}(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.19)$$

$$B_3^{31}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{12}(p_3, p_1, p_2, p_4) \quad (3.20)$$

$$B_3^{32}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -B_1^{11}(p_3, p_1, p_2, p_4) - B_1^{12}(p_3, p_1, p_2, p_4) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} B_4^{21}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -B_1^{11}(p_3, p_4, p_2, p_1) - B_1^{12}(p_3, p_4, p_2, p_1) \\ &= B_2^{23}(p_3, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} B_4^{22}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= B_1^{11}(p_2, p_4, p_1, p_3) \\ &= B_2^{33}(p_1, p_3, p_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} B_4^{31}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= B_1^{11}(p_1, p_3, p_2, p_4) + B_1^{11}(p_3, p_1, p_2, p_4) \\ &\quad + B_1^{12}(p_1, p_3, p_2, p_4) + B_1^{12}(p_3, p_1, p_4, p_2) \\ &= B_2^{21}(p_3, p_1, p_2, p_4) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} B_4^{32}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -B_1^{11}(p_1, p_4, p_2, p_3) - B_1^{12}(p_1, p_4, p_2, p_3) \\ &= B_2^{23}(p_1, p_3, p_2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} B_5^{11}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= B_1^{11}(p_1, p_4, p_3, p_2) \\ &= B_2^{33}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} B_5^{12}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -B_1^{11}(p_3, p_4, p_1, p_2) - B_1^{12}(p_3, p_4, p_1, p_2) \\ &= B_2^{23}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} B_5^{31}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -B_1^{11}(p_2, p_4, p_1, p_3) - B_1^{12}(p_2, p_4, p_1, p_3) \\ &= B_2^{23}(p_2, p_3, p_1) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} B_5^{32}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= B_1^{11}(p_3, p_2, p_1, p_4) + B_1^{11}(p_2, p_3, p_1, p_4) \\ &\quad + B_1^{12}(p_3, p_2, p_1, p_4) + B_1^{12}(p_2, p_3, p_4, p_1) \\ &= B_2^{23}(p_3, p_2, p_1) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$B_6^{21}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -B_1^{11}(p_2, p_3, p_1, p_4) - B_1^{12}(p_2, p_3, p_1, p_4) \quad (3.30)$$

$$B_6^{22}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{11}(p_2, p_3, p_1, p_4) \quad (3.31)$$

$$B_6^{31}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -B_1^{11}(p_3, p_2, p_1, p_4) - B_1^{12}(p_3, p_2, p_1, p_4) \quad (3.32)$$

$$B_6^{32}(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_1^{12}(p_3, p_2, p_1, p_4) \quad (3.33)$$

$$C^{2112}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{3311}(p_3, p_1, p_2, p_4) \quad (3.34)$$

$$C^{2121}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{3311}(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.35)$$

$$C^{2122}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{2111}(p_2, p_1, p_3, p_4) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} C^{2311}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= C^{2111}(p_1, p_4, p_3, p_2) - C^{2111}(p_4, p_3, p_1, p_2) \\ &\quad + C^{3311}(p_4, p_3, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} C^{2312}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= C^{2111}(p_3, p_4, p_2, p_1) - C^{2111}(p_4, p_2, p_3, p_1) \\ &\quad + C^{3311}(p_4, p_2, p_3, p_1) = C^{2311}(p_3, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$C^{2321}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -C^{3311}(p_2, p_3, p_1, p_3) - C^{2111}(p_3, p_1, p_2, p_4) \quad (3.39)$$

$$C^{2322}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{2111}(p_2, p_3, p_1, p_4) \quad (3.40)$$

$$C^{3111}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{2111}(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.41)$$

$$C^{3112}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -C^{2111}(p_1, p_3, p_2, p_4) - C^{3311}(p_3, p_2, p_1, p_4) \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} C^{3121}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= C^{2111}(p_1, p_4, p_2, p_3) - C^{2111}(p_4, p_2, p_1, p_3) \\ &\quad + C^{3311}(p_4, p_2, p_1, p_3) = C^{2311}(p_3, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} C^{3122}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= C^{2111}(p_2, p_4, p_3, p_1) - C^{2111}(p_4, p_3, p_2, p_1) \\ &\quad + C^{3311}(p_4, p_3, p_2, p_1) = C^{2311}(p_2, p_1, p_3) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$C^{3312}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -C^{2111}(p_2, p_3, p_1, p_4) - C^{3311}(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (3.45)$$

$$C^{3321}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -C^{2111}(p_3, p_2, p_1, p_4) - C^{3311}(p_1, p_3, p_2, p_4) \quad (3.46)$$

$$C^{3322}(p_1, p_2, p_3, p_4) = C^{3311}(p_2, p_1, p_3, p_4) \quad (3.47)$$

Besteht man jedoch darauf, einen der Impulse aus den Variablen zu eliminieren, wird es sinnvoll, zu Funktionen von nur noch drei Argumenten überzugehen. Dies erleichtert später Symmetriebetrachtungen bei speziellen Ansätzen für die Vierpunktfunktion, wenn der Viererimpulsübertrag durch die Kopplung an das Magnetfeld verschwindet. Der Preis für diese Vereinfachung ist jedoch eine steigende Variablenzahl von 5 auf 9. In unserem Fall haben wir in den Gleichungen (3.10) - (3.47) den Impuls p_4 eliminiert, indem man bei allen Variablen, bei denen p_4 im letzten Argument steht, dieses einfach weglässt. Zusätzlich werden dabei folgende Variablen eingeführt:

$$C^{2311}(p_1, p_2, p_3) = -C^{2311}(p_3, p_1, p_2) - C^{2311}(p_2, p_3, p_1) \quad (3.48)$$

$$B_2^{21}(p_1, p_2, p_3) = B_2^{21}(p_2, p_1, p_3) \quad (3.49)$$

$$B_2^{33}(p_1, p_2, p_3) = B_2^{33}(p_2, p_1, p_3) \quad (3.50)$$

Sowie B_2^{23} , die keine Symmetrie ihrer Argumente aufweist.

4 Näherung für verschwindenden Kopplungsimpuls

Wie zuvor bereits diskutiert, soll beim Light-by-Light-Prozess der Viererimpulsübertrag durch die Kopplung an das Magnetfeld verschwinden. In unserer Zerlegung (2.18) entspricht das dem Limes $p_4 \rightarrow 0$. Betrachtet man die Ableitung mit eben dieser Ersetzung in Gleichung (1.2), sieht man, dass nur die Beiträge der Vierpunktfunktion überhaupt zum anomalen magnetischen Moment des Myons beitragen, die von der Ordnung $\mathcal{O}(p_4^1)$ sind, weil höhere Ordnungen im Limes verschwinden, $\mathcal{O}(p_4^0)$ durch die Ableitung verschwindet, und noch niedrigere Ordnung nicht auftreten kann, weil sie zu einer unphysikalischen Divergenz des magnetischen Moments führen würden. Während alle anderen Ordnungen also prinzipiell auftreten dürfen, sind letztere konzeptionell verboten. Da in Entwicklung (2.18) offensichtlich jedoch die Projektoren alle von

der Ordnung $\mathcal{O}(p_4^0)$ sind, müssen alle lorentzskalare Variablen von der Ordnung $\mathcal{O}(p_4^1)$ sein. Differenziert man nun die Ward-Identität (2.4) nach p_4 , erhält man:

$$0 = \partial_{p_4}^\rho p_{4\sigma} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = \Pi^{\mu\nu\lambda\rho} + p_{4\sigma} \partial_{p_4}^\rho \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (4.1)$$

Diese Gleichung ist auf Grund der Ward-Identität für alle $p_4 \neq 0$ erfüllt, weil:

$$p_{4\sigma} \partial_{p_4}^\rho T_4^{\sigma\delta} = -p_{4\sigma} \partial_{p_4}^\rho \frac{p_4^\sigma p_4^\delta}{p_4^2} = -p_{4\sigma} \left(\frac{p_4^\delta g^{\rho\sigma}}{p_4^2} + \frac{p_4^\sigma g^{\rho\delta}}{p_4^2} - 2 \frac{p_4^\rho p_4^\sigma p_4^\delta}{p_4^4} \right) = -T_4^{\rho\delta} \quad (4.2)$$

Damit gehen die Terme, in denen die Ableitung auf die Projektoren wirkt gegen $-\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}$. Die Ableitung der Variablen ist irrelevant. Diese Terme verschwinden, weil sie proportional zu $p_{4\sigma} T_4^{\sigma\delta}$ sind. Die Gleichung (4.1) ist ebenfalls im Grenzfall $p_4 = 0$ erfüllt: die Ableitung im hinteren Teil kann nicht singular sein, weil es nach (1.2) sonst auch das magnetische Moment des Myons wäre, und verschwindet daher, wenn sie mit dem Nullvektor kontrahiert wird. Im nichtabgeleiteten Term verschwinden alle Ordnungen höher als $\mathcal{O}(p_4^0)$ trivialerweise im Limes. Die gesamte Vierpunktfunktion ist jedoch ohnehin linear von T_4 abhängig, und es gilt:

$$\lim_{p_4 \rightarrow 0} T_4^{\sigma\delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{p_4 \rightarrow 0} \frac{p_4^\sigma p_4^\delta}{p_4^2} = g^{\sigma\delta} \quad (4.3)$$

Die Gleichung (4.1) und damit die Ward-Identität ist also auch im Limes $p_4 \rightarrow 0$ gültig, was unsere Zerlegung für diesen Fall bestätigt.

Weiterhin lässt sich die Vierpunktfunktion auch durch ihre Amplitude \mathcal{A} ausdrücken:

$$\mathcal{A} = \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} \varepsilon_{3\lambda} \varepsilon_{4\sigma} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (4.4)$$

Wobei es sich bei ε_i um die bereits in (2.3) eingeführten Polarisationsvektoren handelt. Dabei gilt durch Fouriertransformation der Lorenz-Eichung:

$$\partial_{4\sigma} A_4^\sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{4\sigma} \varepsilon_4^\sigma = 0 \quad (4.5)$$

Was allerdings nur für das reelle Photon mit p_4 gilt.

Für diese Amplitude existiert eine Zerlegung nach K. Melnikov und A. Vainshtein [3], deren Allgemeinheit und Verbindung zu den bereits diskutierten Zerlegungen der Vierpunktfunktion im Folgenden überprüft wurde. Behandelt man p_4 (schon vor der Ableitung der Vierpunktfunktion) als sehr klein, kann man die Amplitude in linearer Ordnung von p_4 zu entwickeln. Dies ist für die spätere Ableitung und den Limes in (1.2) sinnvoll. Verwirft man davon zusätzlich die nicht zu $(g - 2)$ beitragenden Term der Ordnung $\mathcal{O}(p_4^0)$, dann lassen sich die Entwicklungsvariablen schreiben als ihre bzgl. p_4 konstante Ableitung nach $p_4^{\overline{r}}$ kontrahiert mit $p_4^{\overline{r}}$, und

letzteres mit T_4 zusammenziehen:

$$\varepsilon_{4\sigma} T_4^{\sigma\delta} p_4^\tau = \varepsilon_4^\delta p_4^\tau - p_4^\delta \frac{p_4^\tau p_{4\sigma} \varepsilon_4^\sigma}{p_4^2} \approx \varepsilon_4^\delta p_4^\tau - p_4^\delta \varepsilon_4^\tau = f_4^{\tau\delta} \quad (4.6)$$

Diese Näherung erhält man durch Betrachtung des Bruches nach L'Hospital. Die erhaltene Größe entspricht dabei dem Fouriertransformierten des Feldstärketensors. Sie ist daher auch antisymmetrisch unter Vertauschung der Lorentzindizes. Man kann zu einer aus transformierten Feldstärketensoren aufgebauten Amplitude nachweisen, dass deren Vierpunktfunktion die Ward-Identitäten erfüllt, weil letztere einfach zu prüfen sind, indem man in der Amplitude alle ε_i mit p_i substituiert, wodurch jedoch die Feldstärketensoren verschwinden. Es ist daher möglich, mittels dieser Näherung für kleine p_4 , die Amplitude selbst auf Grundlage der Kovariantenzerlegung neu zu entwickeln, und dabei nur die transformierten Feldstärketensoren anstatt Projektoren zu verwenden, wie erfolgt in [3]. Dort wurde folgende konkrete Zerlegung vorgenommen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & G_1^{(1,2,3)} \{f_4 f_1\} \{f_2 f_3\} + G_1^{(2,3,1)} \{f_4 f_2\} \{f_3 f_1\} + G_1^{(3,1,2)} \{f_4 f_3\} \{f_1 f_2\} \\ & + G_2^{(1,2,3)} \{f_4 \tilde{f}_1\} \{f_2 \tilde{f}_3\} + G_2^{(2,3,1)} \{f_4 \tilde{f}_2\} \{f_3 \tilde{f}_1\} + G_2^{(3,1,2)} \{f_4 \tilde{f}_3\} \{f_1 \tilde{f}_2\} \\ & + G_3^{(1,2,3)} \{\eta_{23} f_4 f_1 \eta_{23}\} \{f_2 f_3\} + G_3^{(2,3,1)} \{\eta_{31} f_4 f_2 \eta_{31}\} \{f_3 f_1\} + G_3^{(3,1,2)} \{\eta_{12} f_4 f_3 \eta_{12}\} \{f_1 f_2\} \\ & + \tilde{G}_3^{(1,2,3)} \{\eta_{23} f_4 f_1 p_1\} \{f_2 f_3\} + \tilde{G}_3^{(2,3,1)} \{\eta_{31} f_4 f_2 p_2\} \{f_3 f_1\} + \tilde{G}_3^{(3,1,2)} \{\eta_{12} f_4 f_3 p_3\} \{f_1 f_2\} \\ & + G_4^{(1,2,3)} \{\eta_{23} f_4 f_1 \eta_{23}\} \{p_2 f_2 \eta_{31}\} \{p_3 f_3 \eta_{12}\} + G_4^{(2,3,1)} \{\eta_{31} f_4 f_2 \eta_{31}\} \{p_3 f_3 \eta_{12}\} \{p_1 f_1 \eta_{23}\} \\ & + G_4^{(3,1,2)} \{\eta_{12} f_4 f_3 \eta_{12}\} \{p_1 f_1 \eta_{23}\} \{p_2 f_2 \eta_{31}\} \\ & + \tilde{G}_4^{(1,2,3)} \{p_1 f_4 f_1 p_1\} \{p_2 f_2 \eta_{31}\} \{p_3 f_3 \eta_{12}\} + \tilde{G}_4^{(2,3,1)} \{p_2 f_4 f_2 p_2\} \{p_3 f_3 \eta_{12}\} \{p_1 f_1 \eta_{23}\} \\ & + \tilde{G}_4^{(3,1,2)} \{p_3 f_4 f_3 p_3\} \{p_1 f_1 \eta_{23}\} \{p_2 f_2 \eta_{31}\} \\ & + G_5^{(1,2,3)} \{p_1 f_4 p_3\} \{p_1 f_1 \eta_{23}\} \{p_2 f_2 \eta_{31}\} \{p_3 f_3 \eta_{12}\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wobei die verwendete Notation folgende Bedeutungen hat:

$$\begin{aligned} \{f_i f_j\} &= f_i^{\mu\nu} f_{j\nu\mu} & \{f_i \tilde{f}_j\} &= \frac{1}{2} f_i^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} f_j^{\alpha\beta} & \{p_i f_j f_k p_l\} &= p_{i\mu} f_j^{\mu\alpha} f_{k\alpha\beta} p_l^\beta \\ \{p_i f_j p_k\} &= p_{i\mu} f_j^{\mu\nu} p_{k\nu} & \eta_{ij} &= p_i - p_j & G_n^{(i,j,k)} &= G_n(p_i, p_j, p_k) \end{aligned}$$

Die Funktionen $G_{1,2,3,4}$ sind dabei symmetrisch unter Permutation ihrer letzten beiden Argumente, $\tilde{G}_{3,4}$ sind antisymmetrisch unter Vertauschung ihrer letzten beiden Argumente und G_5 ist total symmetrisch unter Permutationen aller Argumente. Es handelt sich also um eine Zerlegung mit 19 Variablen, die aus 7 Funktionen mit permutierten Argumenten besteht. Weiterhin ist anzumerken, dass die gesamte Amplitude invariant unter Permutation der Impulse p_1, p_2, p_3 bleibt (Vainshtein, Melnikov [3]). Die scheinbare Asymmetrie, welche durch die erste Klammer im letzten Term von (4.7) hervorgerufen wird, ist keine, da durch die lineare Nähe-

ung außerhalb von f_4 gilt $p_4 = 0$, und durch die Antisymmetrie des Feldstärketensors diese Relationen folgen:

$$\{p_i f_j p_k\} = -\{p_k f_j p_i\} \quad \{p_i f_j p_i\} = 0 \quad g_{\mu\nu} f_j^{\mu\nu} = 0 \quad (4.8)$$

Dadurch erhält man:

$$\{p_1 f_4 p_3\} = -\{p_1 f_4 p_2\} = \{p_3 f_4 p_2\} \quad (4.9)$$

sowie die Einsicht, dass es zahlreiche weitere Darstellungsformen für exakt die gleiche Zerlegung gibt. Dies macht es besonders schwierig, die Richtigkeit und Eindeutigkeit dieser Zerlegung zu beweisen. Um dies zu erreichen, haben wir, ausgehend von der Tatsache dass f_4 essenziell im Konzept dieser Zerlegung ist und in jedem der Terme vorkommen muss, den allgemeinen Ansatz gewählt:

$$\mathcal{A} = \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \varepsilon_3^\lambda f_4^{\sigma\delta} \chi_{\mu\nu\lambda\sigma\delta} \quad (4.10)$$

Wobei der Tensor χ nun wieder nach dem Kalkül der Kovariantenzerlegung entwickelt werden kann. Zu beachten ist dabei, dass dieser immernoch die Ward-Identitäten für die Impulse p_1, p_2, p_3 erfüllen muss, die Amplitude muss bei der Substitution $\varepsilon_i \rightarrow p_i$ also verschwinden. Deshalb wurde von uns das selbe Kalkül wie in (2.18) benutzt, dessen Allgemeinheit in Kapitel 2 bereits bewiesen wurde:

$$\mathcal{A} = \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} \varepsilon_{3\lambda} f_4^{\sigma\delta} T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} \chi'_{\alpha\beta\gamma\sigma\delta} \quad (4.11)$$

$\chi'_{\alpha\beta\gamma\sigma\delta}$ kann nun in Kovarianten mit zwei Impulse ($p_4 = 0$ und Erhaltungssatz) und metrischen Tensoren zerlegt werden. Allerdings fallen durch die Relationen (4.8) einige Kovarianten heraus oder lassen sich durch andere ausdrücken. So gibt es zum Beispiel bei Kontraktionen von Impulsen mit Projektoren nur eine Variante, weil p_4 verschwindet, ein zweiter Impuls durch die Eigenschaft (2.7) verschwindet, und ein dritter sich durch den negativen vierten Impuls

beschreibt. Eine mögliche Zerlegung lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} \varepsilon_{3\lambda} f_4^{\sigma\delta} [p_{1\sigma} p_{2\delta} T_1^{\mu\alpha} p_{2\alpha} T_2^{\nu\beta} p_{1\beta} T_3^{\lambda\gamma} p_{1\gamma} M_1 + \\
& p_{1\sigma} p_{2\delta} T_1^{\mu\alpha} p_{2\alpha} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} M_2^1 + \\
& p_{1\sigma} p_{2\delta} T_2^{\nu\beta} p_{1\beta} T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\lambda\gamma} M_2^2 + \\
& p_{1\sigma} p_{2\delta} T_3^{\lambda\gamma} p_{1\gamma} T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} M_2^3 + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\alpha} T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} p_{1\beta} T_3^{\lambda\gamma} p_{1\gamma} M_3^{\{1,4\}} + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\beta} T_2^{\nu\beta} T_1^{\mu\alpha} p_{2\alpha} T_3^{\lambda\gamma} p_{1\gamma} M_3^{\{2,5\}} + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} T_1^{\mu\alpha} p_{2\alpha} T_2^{\nu\beta} p_{1\beta} M_3^{\{3,6\}} + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\alpha} T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} g_{\beta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} M_4^{\{1,4\}} + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\beta} T_2^{\nu\beta} T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\gamma} T_3^{\lambda\gamma} M_4^{\{2,5\}} + \\
& \{ p_{1\sigma}, p_{2\sigma} \} g_{\delta\gamma} T_3^{\lambda\gamma} T_1^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} T_2^{\nu\beta} M_4^{\{3,6\}} + \\
& g_{\sigma\beta} g_{\delta\gamma} T_2^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} T_1^{\mu\alpha} p_{2\alpha} M_5^1 + \\
& g_{\sigma\alpha} g_{\delta\gamma} T_1^{\mu\alpha} T_3^{\lambda\gamma} T_2^{\nu\beta} p_{1\beta} M_5^2 + \\
& g_{\sigma\alpha} g_{\delta\beta} T_1^{\mu\alpha} T_3^{\nu\beta} T_3^{\lambda\gamma} p_{1\gamma} M_5^3] \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Die geschweiften Klammern $\{ \}$ sind dabei wie üblich Auswahlmöglichkeiten. Damit kann die Anzahl der 19 Variablen bestätigt werden. Weiterhin lassen sich die Variablen aus (4.7) auch durch die aus (4.12) ausdrücken (um Indizes zu sparen, sei $\langle p_i p_j \rangle = p_{i\alpha} p_j^\alpha$):

$$G_1^{(1,2,3)} = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{8 \langle p_2 p_3 \rangle} \left[2M_4^1 - M_4^4 + \left(1 - \frac{\langle p_2 p_3 \rangle}{p_2^2} \right) M_5^2 + \left(1 - \frac{\langle p_2 p_3 \rangle}{p_3^2} \right) M_5^3 \right] \tag{4.13}$$

$$G_1^{(2,3,1)} = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{8 \langle p_1 p_3 \rangle} \left[2M_4^5 - M_4^2 + \left(1 - \frac{\langle p_1 p_3 \rangle}{p_1^2} \right) M_5^1 + \left(1 - \frac{\langle p_1 p_3 \rangle}{p_3^2} \right) M_5^3 \right] \tag{4.14}$$

$$G_1^{(3,2,1)} = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{8 \langle p_1 p_2 \rangle} \left[-M_4^3 - M_4^6 + \left(\frac{1 - \langle p_1 p_2 \rangle}{p_1^2} \right) M_5^1 + \left(1 - \frac{\langle p_1 p_2 \rangle}{p_2^2} \right) M_5^2 \right] \tag{4.15}$$

$$G_2^{(1,2,3)} = -\frac{1}{4} p_2^2 p_3^2 M_5^1 \tag{4.16}$$

$$G_2^{(2,3,1)} = -\frac{1}{4} p_1^2 p_3^2 M_5^2 \tag{4.17}$$

$$G_2^{(3,2,1)} = -\frac{1}{4} p_1^2 p_2^2 M_5^3 \tag{4.18}$$

$$G_3^{(1,2,3)} = -\frac{p_1^2}{\langle p_2 p_3 \rangle} [p_2^2 p_3^2 M_2^1 + p_3^2 M_5^2 + p_2^2 M_5^3] \tag{4.19}$$

$$G_3^{(2,3,1)} = -\frac{p_2^2}{\langle p_1 p_3 \rangle} [-p_1^2 p_3^2 M_2^2 + p_3^2 M_5^1 + p_1^2 M_5^3] \tag{4.20}$$

$$G_3^{(3,2,1)} = -\frac{p_3^2}{\langle p_1 p_2 \rangle} [p_1^2 p_2^2 M_2^3 + p_2^2 M_5^1 + p_1^2 M_5^2] \tag{4.21}$$

$$\tilde{G}_3^{(1,2,3)} = \frac{p_2^2 p_3^2}{8 \langle p_2 p_3 \rangle} \left[(p_3^2 - p_2^2) M_2^1 + 2 M_4^4 + \frac{p_1^2}{p_2^2} M_5^2 - \frac{p_1^2}{p_3^2} M_5^3 \right] \quad (4.22)$$

$$\tilde{G}_3^{(2,3,1)} = \frac{p_1^2 p_3^2}{8 \langle p_1 p_3 \rangle} \left[(p_3^2 - p_1^2) M_2^2 - 2 M_4^2 - \frac{p_2^2}{p_1^2} M_5^1 - \frac{p_2^2}{p_3^2} M_5^3 \right] \quad (4.23)$$

$$\tilde{G}_3^{(3,2,1)} = \frac{p_1^2 p_2^2}{8 \langle p_1 p_2 \rangle} \left[(p_2^2 - p_1^2) M_2^3 + 2 M_4^3 - 2 M_4^6 + \frac{p_3^2}{p_1^2} M_5^1 - \frac{p_3^2}{p_2^2} M_5^2 \right] \quad (4.24)$$

$$G_4^{(1,2,3)} = \frac{p_1^2}{8 \langle p_2 p_3 \rangle (p_3^2 - p_2^2)} \left[- \langle p_2 p_3 \rangle M_3^4 + M_4^4 + M_5^2 - M_5^3 \right] \quad (4.25)$$

$$G_4^{(2,3,1)} = \frac{p_2^2}{8 \langle p_1 p_3 \rangle (p_3^2 - p_1^2)} \left[\langle p_1 p_3 \rangle M_3^4 + M_4^2 + M_5^1 - M_5^3 \right] \quad (4.26)$$

$$G_4^{(3,1,2)} = \frac{p_3^2}{8 \langle p_1 p_2 \rangle (p_1^2 - p_2^2)} \left[\langle p_1 p_2 \rangle (M_3^3 - M_3^6) + M_4^6 - M_4^3 - M_5^1 + M_5^2 \right] \quad (4.27)$$

$$\tilde{G}_4^{(1,2,3)} = -\frac{1}{8 \langle p_2 p_3 \rangle} \left[- \langle p_2 p_3 \rangle (M_3^4 - 2 M_3^1) + M_4^4 - 2 M_4^1 - M_5^2 - M_5^3 \right] \quad (4.28)$$

$$\tilde{G}_4^{(2,3,1)} = -\frac{1}{8 \langle p_1 p_3 \rangle} \left[\langle p_2 p_3 \rangle (M_3^2 - 2 M_3^5) + M_4^2 - 2 M_4^5 - M_5^1 - M_5^3 \right] \quad (4.29)$$

$$\tilde{G}_4^{(3,2,1)} = -\frac{1}{8 \langle p_1 p_2 \rangle} \left[\langle p_2 p_3 \rangle (M_3^3 + 2 M_3^6) - M_4^3 - M_4^6 + M_5^1 + M_5^3 \right] \quad (4.30)$$

$$G_5^{(1,2,3)} = 8 M_1 \quad (4.31)$$

Damit ist die Allgemeinheit der Zerlegung (4.7) nach [3] unter der angenommenen Näherung bestätigt. Es ist allerdings anzumerken, dass diese Entwicklung der Amplitude nicht mehr so allgemein ist wie die der Vierpunktfunktion, weil dort nicht zu $(g - 2)$ beitragende Terme vernachlässigt wurden. Wenn man allerdings schon dazu übergeht, irrelevante Terme in der Vierpunktfunktion zu verwerfen, kann man (2.18) auch weiter vereinfachen, was wir im Folgenden zeigen konnten. Führt man dort die Ableitung aus (1.2) durch, verschwinden, wie zuvor diskutiert, alle Terme, bei denen diese auf die Variablen wirkt, weil dann im Limes $p_4 \rightarrow 0$ der Projektor T_4 nach Eigenschaft (4.3) verschwindet. Es bleiben also nur Terme übrig, bei denen die Ableitung auf die Projektoren T_4 wirkt. Um davon den Limes $p_4 \rightarrow 0$ betrachten zu können, wird hier ein Term der Ordnung $\mathcal{O}(p_4^1)$ aus den nicht verschwindenden Variablen herausgezogen, dieser kann die allgemeine Form $\langle p_i p_4 \rangle$ haben. Es folgt damit:

$$\begin{aligned} \lim_{p_4 \rightarrow 0} \langle p_i p_4 \rangle \partial_{p_4}^\rho T_4^{\sigma\delta} &= \lim_{p_4 \rightarrow 0} \left[- \langle p_i p_4 \rangle \frac{g^{\rho\delta} p_4^\sigma}{p_4^2} - \langle p_i p_4 \rangle \frac{g^{\rho\sigma} p_4^\delta}{p_4^2} + 2 \langle p_i p_4 \rangle \frac{p_4^\sigma p_4^\delta p_4^\rho}{p_4^4} \right] \\ &= -g^{\rho\delta} p_i^\sigma - g^{\rho\sigma} p_i^\delta + 2 \Delta^{\rho\sigma\delta\tau} p_{i\tau} \\ \Delta^{\rho\sigma\delta\tau} &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } \rho = \sigma = \delta = \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Wegen des Kommutators $[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]$ in (1.2) verschwinden aber die letzten beiden Terme und nur $-g^{\rho\delta} p_i^\sigma$ trägt zum magnetischen Moment bei.

Weiterhin verringert sich in dem Limes die Zahl der Beiträge durch unterschiedliche Terme der Kovariantenzerlegung, weil wenn $p_4 = 0$ gilt, und bei der Kontraktion mit dem jeweiligen Projektor ein weiterer Impuls herausfällt. Dann bleiben nur noch zwei Impulse für die Kontraktion mit einem Projektor übrig, von denen jeweils der eine mittels Impulserhaltung durch den anderen ausgedrückt werden kann, es also nur noch eine statt zwei unabhängige Möglichkeiten gibt. Einige der Variablen lassen sich also mit anderen zusammenfassen, ohne ihren Beitrag zu verändern. Nur bei dem Projektor T_4 erfolgt keine solche Reduktion, da Limes und Projektor-kern den gleichen Impuls p_4 eliminieren. Insgesamt können die 43 auf 14 Variablen reduziert werden, also weniger, als in [3] benötigt wurden. Aus diesen Gründen ist auch die Darstellung (4.13 - 4.31) nicht eindeutig. Eine mögliche Wahl der beitragenden Variablen in (2.18) wären zum Beispiel $\{A_1, A_2, A_3, B_1^{11}, B_1^{12}, B_2^{21}, B_3^{11}, B_3^{12}, B_4^{21}, B_5^{11}, B_6^{21}, B_6^{22}, C^{2111}, C^{2112}\}$. Wendet man das gleich Konzept auf die Entwicklung nach [3] an, so gewinnt man mittels der Gleichung (4.6) folgende Näherung:

$$\frac{\partial}{\partial p_{4\rho}} T_4^{\sigma\delta} \langle p_i p_4 \rangle \approx \frac{\partial}{\partial p_{4\rho}} (g^{\sigma\delta} \langle p_i p_4 \rangle - p_i^\sigma p_4^\delta) = p_i^\rho g^{\sigma\delta} - p_i^\sigma g^{\rho\delta} \quad (4.33)$$

Der zweite Term ist bereits aus der ungenäherten Gleichung bekannt, der erste taucht in dieser jedoch nicht auf. Der erste Term geht jedoch unter der Permutation $\rho \leftrightarrow \sigma$ bis auf das Vorzeichen in den zweiten über, letzteres wird aber dadurch ausgeglichen, wenn man diese Permutation in der Spur ausführt, wo die beiden Indizes in dem zuvor diskutierten Kommutator auftreten. Die Näherung liefert also nur einen Faktor 2 im Beitrag zu $(g - 2)$, ist aber dennoch unvorteilhaft, da sie, wie bereits diskutiert, mehr Variablen enthält als notwendig.

5 Beiträge zum anomalen magnetischen Moment

Ausgehend von den 14 Variablen, auf welche die Vierpunktfunktion im letzten Abschnitt reduziert wurde, konnten wir den Beitrag zum magnetischen Moment des Myons mittels Gleichung (1.2) bis auf das Integral bestimmen. Führt man die Berechnung der Spur aus (hier mittels REDUCE-CAS), erhält man Terme der Form:

$$a_\mu^{LbL} = e^6 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{1}{(p - p_1)^2 - m_\mu^2} \frac{F(p_1, p_2)}{(p - p_1 - p_2)^2 - m_\mu^2} \quad (5.1)$$

Im Interesse des im vorherigen Abschnitts hergeleiteten Ausdrucks, wird folgende Schreibweise eingeführt:

$$\frac{\partial}{\partial p_{4\rho}} T_4^{\sigma\delta} A \Big|_{p_4=0} \rightarrow -g^{\rho\delta} \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} A \Big|_{p_4=0} =: -g^{\rho\delta} p_i^\sigma \mathcal{A} \quad (5.2)$$

Wobei A hier eine beliebige Variable in der Vierpunktfunktion sei. Die Größe $F(p_1, p_2)$ lässt sich dann als Summe von Termen mit solchen Variablen der Vierpunktfunktion schreiben. Man beachte, dass die p_i in jedem Summand unabhängig von einander unterschiedliche Linearkombinationen von p_1 und p_2 sein können.

$$F = \sum_{i,j,k,l} F(\mathcal{A}_i) + F(\mathcal{B}_{1\dots 6}^{ij}) + F(\mathcal{C}^{ijkl}) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}_1) = \frac{4i}{3p_1^2 p_2^2} \mathcal{A}_1 & \left[-m_\mu^2 p_1^2 p_2^2 \langle p_i p_3 \rangle + p_1^2 p_2^2 \langle pp_i \rangle \langle pp_3 \rangle - p_1^2 p_2^2 \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle \right. \\ & + (p_1^2 \langle pp_2 \rangle + \langle pp_1 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle + p_1^2 p_2^2 - \frac{1}{2} p_1^2 \langle p_1 p_2 \rangle) \\ & \left. \times (\langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}_2) = \frac{4i}{3p_1^2 p_3^2} \mathcal{A}_2 & \left[-m_\mu^2 p_1^2 p_3^2 + p_1^2 p_3^2 \langle pp_i \rangle \langle pp_2 \rangle \right. \\ & \left. + (p_1^2 \langle pp_3 \rangle - p_3^2 \langle pp_1 \rangle) (\langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - \langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{A}_3) = \frac{4i}{3p_2^2 p_3^2} \mathcal{A}_3 & \left[-m_\mu^2 p_2^2 p_3^2 \langle p_i p_1 \rangle + p_2^2 p_3^2 \langle pp_i \rangle - p_1^2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle \right. \\ & + (\langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle) \\ & \left. \times (p_2^2 p_3^2 - \frac{1}{2} p_3^2 \langle p_2 p_3 \rangle + \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle + \langle pp_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_1^{11}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_1^{11} & [m_\mu^2 p_1^2 \langle p_i p_2 \rangle - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - p_1^2 \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - \langle pp_1 \rangle^2 \langle p_i p_2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_1^{12}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_1^{12} & [m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - m_\mu^2 p_2^2 \langle p_i p_2 \rangle - \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle + p_2^2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_2 \rangle^2 \langle p_i p_1 \rangle - \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_3^{11}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_3^{11} & [m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - m_\mu^2 p_1^2 \langle p_i p_2 \rangle - \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle + p_1^2 \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_1 \rangle^2 \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle] \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_3^{12}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_3^{12} & [m_\mu^2 p_2^2 \langle p_i p_1 \rangle - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - p_2^2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle^2 \langle p_i p_1 \rangle] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_6^{21}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_6^{21} & [m_\mu^2 p_1^2 \langle p_i p_2 \rangle - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - p_1^2 \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle - \langle pp_1 \rangle^2 \langle p_i p_2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{B}_6^{22}) = \frac{2}{3} i \mathcal{B}_6^{22} & [m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - m_\mu^2 p_2^2 \langle p_i p_1 \rangle - \langle p_1 p_2 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle pp_i \rangle + p_2^2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_i \rangle \\ & + \langle pp_2 \rangle^2 \langle p_i p_1 \rangle - \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle] \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$F(\mathcal{B}_2^{21}) = \frac{4i}{3p_1^2 p_2^2} \mathcal{B}_2^{21} \left[\langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{2} p_1^4 p_2^2 - \frac{1}{2} p_1^2 \langle p_1 p_2 \rangle^2 \right. \\ \left. + \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle - \langle pp_2 \rangle p_1^2 \langle p_2 p_3 \rangle \right] \quad (5.13)$$

$$F(\mathcal{B}_4^{21}) = \frac{4i}{3p_1^2 p_3^2} \mathcal{B}_4^{21} \left[-p_1^2 p_2^2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_2 \rangle + (\langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle) \right. \\ \left. \times (\langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle p_3^2 + \langle pp_1 \rangle p_1^2 \langle p_2 p_3 \rangle - \langle pp_2 \rangle p_1^2 \langle p_1 p_2 \rangle) \right] \quad (5.14)$$

$$F(\mathcal{B}_5^{11}) = \frac{4i}{3p_2^2 p_3^2} \mathcal{B}_5^{11} \left[\langle pp_1 \rangle \langle p_i p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_i p_1 \rangle \right] \left[\frac{1}{2} p_1^2 p_2^2 p_3^2 - \frac{1}{2} p_3^2 \langle p_1 p_2 \rangle^2 \right. \\ \left. + \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle - \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_1 p_3 \rangle \right] \quad (5.15)$$

$$F(\mathcal{C}^{2111}) = 0 \quad (5.16)$$

$$F(\mathcal{C}^{2112}) = 0 \quad (5.17)$$

Dabei wurde zur Vereinfachung die Ersetzung $p_3 = -p_1 - p_2$ vorgenommen. Gemäß unserer Argumentation tragen folgende Variablen der Kovariantenzerlegung zu den hier eingeführten Variablen bei:

$$p_i^\sigma \mathcal{A}_{\{1,2,3\}} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} A_{\{1,2,3\}} \Big|_{p_4=0} \quad (5.18)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_1^{11} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_1^{11} - B_1^{21}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.19)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_1^{12} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_1^{12} - B_1^{22}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.20)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_2^{21} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_2^{21} - B_2^{23} - B_2^{31} + B_2^{33}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.21)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_3^{11} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_3^{11} - B_3^{31}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.22)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_3^{12} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_3^{12} - B_3^{32}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.23)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_4^{21} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_4^{21} - B_4^{22} - B_4^{31} + B_4^{32}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.24)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_5^{11} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_5^{11} - B_5^{12} - B_5^{31} + B_5^{32}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.25)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_6^{21} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_6^{21} - B_6^{31}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.26)$$

$$p_i^\sigma \mathcal{B}_6^{22} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} [B_6^{22} - B_6^{32}] \Big|_{p_4=0} \quad (5.27)$$

$$p_i^\sigma C^{2111} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} \left[C^{2111} - C^{2121} - C^{2311} + C^{2321} - C^{3111} + C^{3121} + C^{3311} - C^{3321} \right] \Big|_{p_4=0} \quad (5.28)$$

$$p_i^\sigma C^{2112} = \frac{\partial}{\partial p_{4\sigma}} \left[C^{2112} - C^{2122} - C^{2312} + C^{2322} - C^{3112} + C^{3122} + C^{3312} - C^{3322} \right] \Big|_{p_4=0} \quad (5.29)$$

Offensichtlich trägt keiner der Terme mit C^{ijkl} zum anomalen magnetischen Moment bei, damit verschwinden 2 der 14 übrigen Summanden, bzw. 16 der 43 ursprünglichen Terme in der Spur von (1.2). Es verbleiben damit 27, also weniger als die in [2] vorausgesagten 32 Beiträge.

6 Bestätigung des π^0 -Pol-Beitrags

In diesem Abschnitt wird eine Rechnung für den Beitrag zu $(g - 2)$ exemplarisch am Austausch eines neutralen, pseudoskalaren Pions π^0 durchgeführt. Die nachfolgenden Resultate bestätigen die Ergebnisse von [4]. Die folgenden drei Feynman-Diagramme können zu diesem Prozess beitragen:

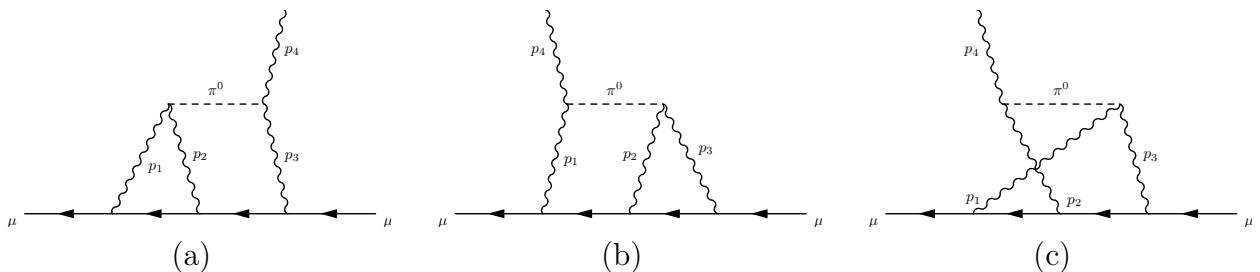


Tabelle 6.1: Beiträge zum neutralen Pion-Austausch

Für die Kopplung an das Pion gilt:

$$i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | \pi^0(p) \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(q^2, (p-q)^2) \quad (6.1)$$

Und die Kopplung des Pions an zwei Photonen erhält man durch die Substitution $p \rightarrow -p - q$ in obiger Formel. Dabei handelt es sich bei $\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}$ um den off-shell-Formfaktor des Pions, welcher durch die Ununterscheidbarkeit der koppelnden Photonen unter Vertauschung seiner Argumente invariant bleibt.

Zusammen mit den Pion-Propagatoren ergibt sich für jedes der drei Diagramme in Tabelle 6.1

ein Beitrag zur Vierpunktfunktion (mit der Ersetzung $p_3 = -p_1 - p_2 - p_4$):

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(a)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, p_2^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}((p_4 + p_1 + p_2)^2, p_4^2)}{(p_1 + p_2)^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \varepsilon_{\lambda\sigma\delta\tau} (p_4 + p_1 + p_2)^\delta (p_1 + p_2)^\tau \quad (6.2)$$

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(b)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, p_4^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}((p_4 - p_1 - p_2)^2, p_2^2)}{(p_1 + p_4)^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} p_1^\alpha (p_4 + p_1)^\beta \varepsilon_{\nu\lambda\delta\tau} (p_4 + p_1 + p_2)^\delta p_2^\tau \quad (6.3)$$

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(c)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, (p_1 + p_2 + p_4)^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_2^2, p_3^2)}{(p_2 + p_4)^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} p_1^\alpha (p_4 + p_1 + p_2)^\beta \varepsilon_{\nu\sigma\delta\tau} (p_4 + p_2)^\delta p_2^\tau \quad (6.4)$$

Betrachtet man die Ableitung nach dem Impuls p_4 , stellt man fest, dass es in jedem der drei Terme einen kontrahierten Epsilontensor gibt, der nicht abgeleitet verschwindet, weil im Limes $p_4 \rightarrow 0$ nur noch gleiche Impulse mit diesem kontrahiert werden. Die Ableitung liefert darum jeweils einen Term pro Feynmandiagramm:

$$\frac{\partial}{\partial p_4^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma} \Big|_{p_4=0} = \mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(a)} + \mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(b)} + \mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(c)} \quad (6.5)$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(a)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, p_2^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}((p_1 + p_2)^2, 0)}{(p_1 + p_2)^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \varepsilon_{\lambda\sigma\rho\tau} (p_1 + p_2)^\tau \quad (6.6)$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(b)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, 0) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_2^2, (p_1 + p_2)^2)}{p_1^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} p_1^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\tau\delta} p_1^\delta p_2^\tau \quad (6.7)$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(c)} = \frac{i \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, (p_1 + p_2)^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_2^2, 0)}{p_2^2 - m_\pi^2} \varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \varepsilon_{\nu\sigma\rho\tau} p_2^\tau \quad (6.8)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (1.2) lässt sich nun der Beitrag explizit berechnen, nach Auflösung der Spur kann man das Integral wie folgt darstellen (zur Spurberechnung wurde REDUCE-CAS verwendet und die Ergebnisse mit der freien Mathematica-Erweiterung 'Tracer' überprüft):

$$a_\mu^{\pi^0} = -e^6 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{1}{(p + p_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - p_2)^2 - m_\mu^2} \\ \times \left[\frac{\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, (p_1 + p_2)^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_2^2, 0)}{p_2^2 - m_\pi^2} T_1 + \frac{\mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, p_2^2) \mathcal{F}_{\pi^0\gamma^*\gamma^*}((p_1 + p_2)^2, 0)}{(p_1 + p_2)^2 - m_\pi^2} T_2 \right] \quad (6.9)$$

Der Term mit $\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(a)}$ in (1.2) eingesetzt lässt sich durch die Substitution $p_1 \rightarrow -p_1$ und $p_2 \rightarrow p_1 + p_2$ auf die Form der Lösung bringen. Dabei stellt man fest, dass $\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(a)}$ in $-\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(c)}$ übergeht, wenn man zusätzlich noch λ und ν in der Spur vertauscht. Ähnliche verhält es sich mit der Substitution $p_1 \rightarrow p_2$ und $p_2 \rightarrow -p_1 - p_2$ im Term mit $\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(b)}$, auch dieser geht nämlich in $-\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho}^{(c)}$ über, wenn man neben der verwendeten Substitution noch μ und ν in der Spur

vertauscht. Beide Terme liefern dann identische Beiträge zu T_1 , was die Symmetrie in den Feynmangraphen (a) und (b) widerspiegelt. Konkret erhält man:

$$T_1 = \frac{16}{3} \left[\langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle - \langle pp_2 \rangle^2 p_1^2 - \frac{1}{2} \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle p_2^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \langle pp_2 \rangle p_1^2 p_2^2 - \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle^2 + m_\mu^2 p_1^2 p_2^2 - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle^2 \right] \quad (6.10)$$

Nur das Diagramm (c) trägt daher zu T_2 bei, auf die Form wie in (6.9) lässt es sich durch die bereits einmal verwendete Substitution $p_1 \rightarrow -p_1$ und $p_2 \rightarrow p_1 + p_2$ bringen, und liefert:

$$T_2 = \frac{8}{3} \left[-\langle pp_1 \rangle^2 p_2^2 + \frac{1}{2} \langle pp_1 \rangle p_1^2 p_2^2 + \frac{1}{2} \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle p_2^2 - \langle pp_2 \rangle^2 p_1^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle pp_2 \rangle p_1^2 p_2^2 - \frac{1}{2} \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle p_1^2 + 2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle + m_\mu^2 p_1^2 p_2^2 - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle^2 \right] \quad (6.11)$$

Weiterhin fällt im zweiten Summanden in Gleichung (6.9) die Invarianz aller Ausdrücke vor dem T_2 unter Permutation $p_1 \leftrightarrow -p_2$ auf, wodurch der zum Integral beitragende Teil von T_2 ebenfalls diese Invarianz aufweisen muss. Man stellt fest, dass dies den gesamten Ausdruck T_2 betrifft, allerdings gehen dabei nur die letzten drei angegebenen Terme in sich selbst über, die ersten drei Summanden hingegen werden zu den nächsten drei und umgekehrt. Dieses Symmetrieargument macht es also möglich, drei Terme durch drei bereits bekannte auszudrücken, ohne das Ergebnis des Integrals zu manipulieren, es folgt:

$$T_2 = \frac{8}{3} \left[-2 \langle pp_1 \rangle^2 p_2^2 + \langle pp_1 \rangle p_1^2 p_2^2 + \langle pp_1 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle p_2^2 \right. \\ \left. + 2 \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle + m_\mu^2 p_1^2 p_2^2 - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle^2 \right] \quad (6.12)$$

Das Integral (6.9) könnte nun unter Zuhilfenahme einer konkreten Näherung des Formfaktors berechnet werden, drei der acht Integrationen lassen sich dabei als unabhängige Winkel abintegrieren, es verbleiben drei weitere Winkel jeweils zwischen den Impulsen p, p_1, p_2 sowie die Integration über die Beträge der letzten beiden. Lösungen lassen sich dabei unter Verwendung von Gegenbauer-Polynomen ermitteln, wie in [1] diskutiert. Das gesamte Konzept ist auch auf jeden anderen pseudoskalaren Austausch anwendbar.

7 Berechnung des skalaren Austauschbeitrags

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt soll hier der Beitrag des Austausches eines neutralen, skalaren Teilchens der Masse M zu $(g - 2)$ berechnet werden. Es können dabei wieder die drei Feynmandiagramme aus Tabelle 6.1 beitragen, dabei lässt sich die Vierpunktfunktion aus Propagator und zwei Zweipunktfunktionen entwickeln:

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{i \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) \Pi^{\lambda\sigma}(p_3, p_4)}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} \quad (7.1)$$

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{i \Pi^{\mu\sigma}(p_1, p_4) \Pi^{\nu\lambda}(p_2, p_3)}{(p_1 + p_4)^2 - M^2} \quad (7.2)$$

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{i \Pi^{\mu\lambda}(p_1, p_3) \Pi^{\nu\sigma}(p_2, p_4)}{(p_2 + p_4)^2 - M^2} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= [g^{\mu\nu} \langle p_1 p_2 \rangle - p_1^\nu p_2^\mu] \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \\ &= T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} (g_{\alpha\beta} \langle p_1 p_2 \rangle - p_{2\alpha} p_{1\beta}) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Entwickelt man die Zweipunktfunktion jedoch mit dem in Abschnitt 2 eingeführten Kalkül, muss man folgern, dass ein weiterer Summand mit einem zweiten Formfaktor existiert, welcher die Form

$$\begin{aligned} \Pi'^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= \left[g^{\mu\nu} \langle p_1 p_2 \rangle + p_1^\nu p_2^\mu + 2p_1^\mu p_2^\nu \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^2}{p_1^2 p_2^2} - 2p_1^\mu p_1^\nu \frac{\langle p_1 p_2 \rangle}{p_1^2} - 2p_2^\mu p_2^\nu \frac{\langle p_1 p_2 \rangle}{p_2^2} \right] \mathcal{F}'_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \\ &= T_1^{\mu\alpha} T_2^{\nu\beta} (g_{\alpha\beta} \langle p_1 p_2 \rangle + p_{2\alpha} p_{1\beta}) \mathcal{F}'_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

besitzt. Dessen Diskussion soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Da sich in jedem Summand der Vierpunktfunktion ein transversaler Projektor T_4 befindet, welcher im Limes $p_4 \rightarrow 0$ verschwindet, kann die Ableitung nur auf diesen wirken. Dabei gilt jedoch, wenn man alle Terme verwirft, welche durch den Kommutator in (1.2) verschwinden:

$$\lim_{p_4 \rightarrow 0} \left(\partial_{p_4}^\rho T_4^{\sigma\delta} \right) [g_{\gamma\delta} \langle p_3 p_4 \rangle \mp p_{4\gamma} p_{3\delta}] \rightarrow - \lim_{p_4 \rightarrow 0} \frac{p_4^\sigma g^{\rho\delta}}{p_4^2} [g_{\gamma\delta} \langle p_3 p_4 \rangle \mp p_{4\gamma} p_{3\delta}] = -p_3^\sigma g_\gamma^\rho \pm p_3^\rho g_\gamma^\sigma \quad (7.6)$$

Da man wegen des eben erwähnten Kommutators jedoch unter Vertauschung des Vorzeichens die Indizes ρ, σ vertauschen kann, sieht man, dass auf der Seite, wo das externe Magnetfeld ankoppelt, der Beitrag des alternativen Formfaktors $\mathcal{F}'_{S\gamma^*\gamma^*}$ verschwindet. Nach unserer Ent-

wicklung kann man folgende Identifikationen vornehmen:

$$A_1 = \frac{2i\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_3, p_4) \quad (7.7)$$

$$A_2 = \frac{2i\langle p_1 p_3 \rangle \langle p_2 p_4 \rangle}{(p_2 + p_4)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_3) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_2, p_4) \quad (7.8)$$

$$A_3 = \frac{2i\langle p_1 p_4 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle}{(p_1 + p_4)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_4) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_2, p_3) \quad (7.9)$$

$$B_2^{21} = -\frac{2i\langle p_3 p_4 \rangle}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_2) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_3, p_4) \quad (7.10)$$

$$B_4^{31} = -\frac{2i\langle p_2 p_4 \rangle}{(p_2 + p_4)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_3) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_2, p_4) \quad (7.11)$$

$$B_5^{32} = -\frac{2i\langle p_1 p_4 \rangle}{(p_1 + p_4)^2 - M^2} \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1, p_4) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_2, p_3) \quad (7.12)$$

Stellt man, in Anlehnung an den vorherigen Abschnitt, die Beiträge in der Form

$$a_\mu^S = -e^6 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{1}{(p + p_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - p_2)^2 - m_\mu^2} \\ \times \left[\frac{\mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, (p_1 + p_2)^2) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_2^2, 0)}{p_2^2 - M^2} T_1 + \frac{\mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}(p_1^2, p_2^2) \mathcal{F}_{S\gamma^*\gamma^*}((p_1 + p_2)^2, 0)}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} T_2 \right] \quad (7.13)$$

dar, muss man wieder bei den Diagrammen (a) und (c) jeweils die Substitution $p_1 \rightarrow -p_1$ und $p_2 \rightarrow p_1 + p_2$ sowie bei (b) die Substitution $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow -p_1 - p_2$ anwenden. Wie zuvor erhält man auch in diesem Fall identische Beiträge aus den ersten beiden Diagrammen zu T_1 , und kann T_2 durch die Substitution $p_1 \leftrightarrow -p_2$ weiter vereinfachen ($p_3 = -p_1 - p_2$):

$$T_1 = \frac{16}{3} \left[\langle pp_3 \rangle^2 p_2^2 + \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle + m_\mu^2 \langle p_1 p_3 \rangle p_2^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} p_1^2 + \langle p_1 p_2 \rangle \right) \left(\langle pp_1 \rangle p_2^2 - \langle pp_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle \right) \right] \quad (7.14)$$

$$T_2 = \frac{16}{3} \left[\langle pp_1 \rangle^2 p_2^2 - \langle pp_1 \rangle \langle pp_2 \rangle (p_2^2 + 2 \langle p_1 p_2 \rangle) - m_\mu^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle p_1 p_3 \rangle \right] \quad (7.15)$$

Zusammenfassung

In dieser Arbeit konnte, wie in [2] gefordert, sowohl die Allgemeinheit der Zerlegung der Vierpunktfunktion in 138 Kovarianten, als auch die Reduktion zu 43 Kovarianten mittels der Ward-Identitäten nachvollzogen werden. Dabei wurde zur Darstellung und dem Beweis eine auf ähnliche Probleme verallgemeinerbare Zerlegungsmethode entwickelt und bewiesen, welche die Ward-Identitäten a priori erfüllt. Die so gewonnene Darstellung wurde einer ausführlichen Symmetriebetrachtung unterworfen, aus der gefolgert werden konnte, dass alle Variablen der Vierpunktfunktion nur aus 5 Grundfunktionen mit permutierten Argumenten bestehen. Es konnte weiterhin gezeigt werden, dass die Zerlegung nach [3] mit 19 Kovarianten lediglich eine lineare Näherung für einen verschwindenden Kopplungsimpuls an das Magnetfeld darstellt. Innerhalb dieser Näherung wurde jedoch die Allgemeinheit des Ansatzes bewiesen. Allerdings wurde auch gezeigt, dass ebenjener keine Vorteile bei der Berechnung des Beitrags zum anomalen magnetischen Moment des Myons bietet, wobei sich der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz offensichtlich auf 14 Beiträge vereinfacht, von denen 2 verschwinden, wo hingegen solche Aussagen bei der Zerlegung nach [3] in keinsten Weise trivial sind. Die verbleibenden 12 Beiträge wurden so weit wie allgemein möglich berechnet. Es hat sich dabei gezeigt, dass, entgegen einer Aussage aus [2], nicht 32 sondern lediglich 27 Kovarianten zu $(g - 2)$ beitragen. Abschließend wurden noch einige Berechnungen zum π^0 -Austausch als Beitrag zum magnetischen Moment nach [1] bestätigt und weitere allgemeine Rechnungen für den Austausch eines Skalars vorgenommen.

Quellenverzeichnis

- [1] F. Jegerlehner, A. Nyffeler: *The Muon $g - 2$* , arXiv:0902.3360 [hep-ph], 2009
- [2] J. Bijnens, E. Pallante, J. Prades: *Analysis of the Hadronic Light-by-Light Contributions to the Muon $g - 2$* , arXiv:hep-ph/9511388v2, 1996
- [3] K. Melnikov, A. Vainshtein: *Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited*, arXiv:hep-ph/0312226v1, 2003
- [4] M. Knecht, A. Nyffeler: *Hadronic light-by-light corrections to the muon $g - 2$: The pion-pole contribution*, arXiv:hep-ph/0111058, 2002
- [5] U. Günther: *Automatic Calculation of Graviton Contributions and Hadronic Light-by-Light Scattering Contributions by Spin-2 Mesons to the Muon Anomalous Magnetic Moment*, 2013, TU Dresden, Diplomarbeit
- [6] M. Z. Abyaneh: *The Anatomy of the Pion Loop Hadronic Light by Light Scattering Contribution to the Muon Magnetic Anomaly*, arXiv:1208.2554v1 [hep-ph], 2012
- [7] Muon ($g-2$) Collaboration: G.W. Bennett, et al: *Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL*, arXiv:hep-ex/0602035v1, 2006

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Dominik Stöckinger für seine Betreuung und kompetente Beratung bei dieser Arbeit danken. Besonderer Dank gilt außerdem Patrick Kneschke für die gute Zusammenarbeit und die nützlichen Diskussionen. Weiterer Dank gebührt Marcus Sperling, Markus Bach, Martin Philip Diessner und Christoph Gnendiger für die angenehme und produktive Büroatmosphäre und Unterstützung.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit im Rahmen der Betreuung am Institut für Kern- und Teilchenphysik ohne unzulässige Hilfe Dritter verfasst und alle Quellen als solche gekennzeichnet habe.

Tom Steudtner

Dresden, 04.Juni 2013