



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

---

# **Photonische Zweiseifenbeiträge zum anomalen magnetischen Moment des Myon im MSSM**

Diplomarbeit  
zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades  
Diplom-Physiker

vorgelegt von

**Philipp Freiherr von Weitershausen**  
geboren am 8. März 1983 in Bonn

Institut für Kern- und Teilchenphysik  
der Technischen Universität Dresden  
2009



Eingereicht am 30. April 2009

1. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger
2. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer



# Kurzdarstellung

Die Messungen des anomalen magnetischen Moments des Myon  $a_\mu$  weisen eine Diskrepanz zur Standardmodell-Vorhersage von mehr als  $3\sigma$  auf. Diese Tatsache wird als Hinweis auf neue Physik gedeutet. Eine vielversprechende Theorie für Physik jenseits des Standardmodells ist die Supersymmetrie. Die Einschleifenbeiträge zu  $a_\mu$  sind im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) bereits bekannt und können die Abweichung von  $a_\mu$  für gewisse Parameterszenarien tatsächlich erklären.

Diese Arbeit untersucht eine bestimmte Klasse von Zweischleifenbeiträgen zu  $a_\mu$ , nämlich solche, die zusätzlich zu einer Chargino-Sneutrino- bzw. Neutralino-Smyon-Schleife noch eine Photon-Schleife aufweisen. Die Rechnungen dazu werden in einem vereinfachten Modell durchgeführt. Das Ergebnis reproduziert einerseits die schon bekannten führenden QED-Logarithmen, deren genaue Form ermittelt wird. Andererseits werden die nichtlogarithmischen Beiträge bestimmt, die wie die Einschleifenbeiträge in einer kompakten analytischen Form angegeben werden. Numerisch belaufen sich die nichtlogarithmischen Anteile auf ca.  $-1\%$  des Einschleifenergebnisses.

## Abstract

The muon's anomalous magnetic moment  $a_\mu$  exhibits a  $3\sigma$  discrepancy between experimental measurements and Standard Model predictions. This fact is widely regarded as an indicator for new physics. A promising theory for physics beyond the Standard Model is Supersymmetry. One loop contributions to  $a_\mu$  in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) are already known and can indeed account for the deviation of  $a_\mu$  for certain parameter sets.

This thesis analyzes a particular class of two loop contributions to  $a_\mu$ , namely those that contain a photon loop in addition to a chargino-sneutrino or neutralino-smuon loop. These contributions are computed in a simplified model. The result on the one hand reproduces the already known leading QED logarithms. On the other hand, the non-logarithmic contributions are determined and presented in a similarly compact analytical fashion as the one loop result. Numerically the non-logarithmic contributions amount to ca.  $-1\%$  of the one loop result.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Das Standardmodell</b>	<b>3</b>
1.1. Symmetrien . . . . .	3
1.2. Teilcheninhalt . . . . .	4
1.3. Spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie . . . . .	5
1.4. Quantisierung . . . . .	8
1.5. Grenzen des Standardmodells . . . . .	8
<b>2. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell</b>	<b>11</b>
2.1. Die Supersymmetrie . . . . .	11
2.2. Superfelder auf dem Superraum . . . . .	12
2.3. Definition des MSSM . . . . .	15
2.4. Brechung der Supersymmetrie . . . . .	17
2.5. Teilcheninhalt und Masseneigenzustände . . . . .	18
<b>3. Das magnetische Dipolmoment des Myon</b>	<b>23</b>
3.1. Das anomale magnetische Moment $a_\mu$ . . . . .	23
3.2. Messungen und Standardmodell-Berechnungen . . . . .	24
3.3. Supersymmetrische Beiträge . . . . .	26
<b>4. Berechnung der Zweischleifenbeiträge</b>	<b>31</b>
4.1. Vereinfachtes Modell . . . . .	31
4.2. Zweischleifendiagramme . . . . .	32
4.3. Auswertung der Diagramme . . . . .	35
4.4. Renormierung . . . . .	37
<b>5. Ergebnisse</b>	<b>43</b>
5.1. Renormierungskonstanten . . . . .	43
5.1.1. Myon . . . . .	43
5.1.2. Chargino und Smyon . . . . .	46
5.1.3. Kopplungen . . . . .	47

5.2. Untersuchung der Divergenzen . . . . .	50
5.3. Analytische Ergebnisse . . . . .	53
5.4. Numerische Auswertung . . . . .	57
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>65</b>
<b>A. Konventionen und Bezeichnungen</b>	<b>67</b>
A.1. Notation . . . . .	67
A.2. Kopplungen . . . . .	68
A.3. Standardintegrale . . . . .	70
<b>B. Modelldefinition in FeynArts</b>	<b>71</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>75</b>

# Einleitung

Die Elementarteilchenphysik hebt sich in vielerlei Hinsicht von anderen Richtungen der Physik und Naturwissenschaften ab. Ihr Reiz besteht insbesondere darin, sich nicht diesem oder jenem Phänomen der Natur zu widmen, sondern die Natur selbst, genauer gesagt den Aufbau der Natur, zu untersuchen. Dazu ist zwar die Untersuchung einzelner Aspekte unabdingbar, stellt aber nicht das Ziel dar. Die Absicht ist vielmehr, eine umfassende Beschreibung der fundamentalen Materiebausteine und Kräfte zu erreichen.

Dass die bislang aufgestellte Theorie, das Standardmodell, noch keine solche umfassende Beschreibung sein kann, ist offensichtlich. Es erfasst von den vier Fundamentalkräften die Gravitation nicht und kann nicht alle beobachteten Phänomene beschreiben. Gerade deren Untersuchung ist deswegen besonders reizvoll, denn man erhofft sich davon, Aufschluss über die Physik jenseits des Standardmodells zu erlangen. Eines dieser besagten Phänomene stellt die Abweichung des anomalen magnetischen Moments des Myons ( $a_\mu$ ) von der Standardmodell-Vorhersage dar. Ein vielversprechender Ansatz, diese Abweichung zu erklären, ist Supersymmetrie. Supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells bieten zudem die Möglichkeit, mehrere andere seiner Unzulänglichkeiten zu beheben. Das soll Motivation genug sein, das magnetische Moment des Myons im Rahmen einer supersymmetrischen Theorie, dem Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM), zu untersuchen.

Die supersymmetrischen Beiträge zu  $a_\mu$  sind bereits in erster Ordnung der Störungstheorie bekannt. Sie können die beobachtete Abweichung in der Tat für gewisse Parameterszenarien erklären. Eine Berechnung der Beiträge zweiter Ordnung würde allerdings eine Verringerung der theoretischen Ungenauigkeit bedeuten und somit die Vorhersagekraft von  $a_\mu$  über Physik jenseits des Standardmodells verbessern.

Die Zweischleifenbeiträge im MSSM lassen sich in zwei Gruppen unterteilen. In der ersten wird die Myonleptonzahl vom Myon oder Myonneutrino getragen. Diese Beiträge beinhalten Standardmodell-Diagramme, die um eine Schleife mit MSSM-Teilchen erweitert werden. Sie sind ebenfalls schon bekannt. In der zweiten Gruppe wird die Myonleptonzahl von den Superpartnern, also dem Smyon und Myonsneutrino, getragen. Diese Beiträge ähneln den Diagrammen erster Ordnung, die um eine weitere Schleife erweitert werden. Sie sind noch nicht vollständig bestimmt, es ist hauptsächlich nur der führende QED-Logarithmus bekannt. Ziel

dieser Arbeit ist es, die kompletten QED-Korrekturen zu den MSSM-Einschleifendiagrammen zu untersuchen. Es handelt sich dabei also um Diagramme, die zusätzlich zu den Teilchen der Einschleifenkorrekturen auch Schleifen mit einem Photon enthalten.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. Die ersten drei Kapitel liefern einen Überblick über die theoretischen Grundlagen. Sie beschreiben kurz das Standardmodell, seine minimale supersymmetrische Erweiterung (das MSSM) und das anomale magnetische Moment des Myons. Der Rahmen der dann folgenden Untersuchungen wird nochmals am Ende des dritten Kapitels abgesteckt. Das vierte Kapitel beschreibt das Vorgehen bei den Berechnungen, im Anschluss daran widmet sich das fünfte Kapitel der Auswertung der Ergebnisse.

# 1. Das Standardmodell

Das *Standardmodell* ist die Theorie, die die bislang experimentell nachgewiesenen Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation beschreibt. Die mathematische Darstellung der Elementarteilchentheorie ist dabei besonders geprägt von Symmetrien.

## 1.1. Symmetrien

Im Standardmodell sind zwei grundlegende globale Raumzeitsymmetrien, die Translationsinvarianz und die durch die Lorentzgruppe  $SO(3,1)$  beschriebene spezielle Relativität, verankert. Beide werden zusammengefasst in der *Poincarégruppe* mit der Lie-Algebra

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (1.1)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho) \quad (1.2)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}). \quad (1.3)$$

Dabei sind  $P^\mu$  die Generatoren der Translationen und  $J^{\mu\nu}$  die Generatoren der Lorentztransformation.

Elementarteilchen werden durch Quantenfelder beschrieben. Dabei geht die Darstellung dieser Felder bezüglich der Lorentzgruppe mit einer wichtigen Teilcheneigenschaft, dem *Spin*  $s$ , einher. Der Spin bestimmt auch die Vertauschungsrelation der Teilchen und damit deren Statistik. Teilchen mit halbzahligem Spin ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) gehorchen der Fermi-Statistik, während solche mit ganzzahligem Spin ( $0, 1, \dots$ ) der Bose-Statistik genügen. Diese Tatsache erlaubt es bosonischen Teilchen, durch kohärente Überlagerung Kraftfelder zu bilden. Fermionische Teilchen hingegen können aufgrund des Pauliprinzips Materie formen.

In Quantenfeldtheorien wie der Quantenelektrodynamik (QED) und dem Standardmodell unterliegen die Quantenfelder in der Regel weiteren lokalen Symmetrien, den *Eichsymmetrien*. Die Eichgruppe des Standardmodell besteht aus dem Gruppenprodukt

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

## 1. Das Standardmodell

---

und ist somit *nicht-abelsch*. Dabei bildet die  $SU(3)_C$ -Gruppe die Grundlage der Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik), während die Produktgruppe  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  die Basis der zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinigten elektromagnetischen und schwachen Kräfte ist.

### 1.2. Teilcheninhalt

Der Teilcheninhalt des Standardmodells setzt sich aus den fermionischen Quarks und Leptonen ( $s = \frac{1}{2}$ ), Vektorbosonen ( $s = 1$ ) und dem noch nicht entdeckten skalaren Higgsboson ( $s = 0$ ) zusammen.

Leptonen bilden gegenüber der  $SU(3)_C$  ein Singlett, da sie keine Farbe tragen, während Quarks als Farbtupletts auftreten. Sowohl Leptonen als auch Quarks treten in linkshändigen Dubletts und rechtshändigen Singuletts der  $SU(2)_L$  auf, wobei rechtshändige Neutrinos bislang nicht nachgewiesen wurden. Darüber hinaus gibt es von beiden Teilchensorten jeweils drei bis auf die Masse identische Generationen.

	1. Gen.	2. Gen.	3. Gen.	$C$	$I^3$	$Y/2$
Leptonen	$(\nu_e \ e)_L$	$(\nu_\mu \ \mu)_L$	$(\nu_\tau \ \tau)_L$	0	$\pm 1/2$	$-1/2$
	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	0	0	$-1$
Quarks	$(u \ d)_L$	$(c \ s)_L$	$(t \ b)_L$	$r, g, b$	$\pm 1/2$	$1/6$
	$u_R$	$c_R$	$t_R$	$r, g, b$	0	$2/3$
	$d_R$	$s_R$	$b_R$	$r, g, b$	0	$-1/3$

Die Vektorbosonen entspringen der geforderten Eichinvarianz der Theorie. Sie sind die Träger der jeweiligen Elementarkräfte und aufgrund der Eichfreiheit zwingend masselos.

Gruppe	Eichbosonen	Generatoren	Kopplung
$SU(3)_C$	Gluonen $g^a$ ( $a = 1 \dots 8$ )	$T^a = \lambda^a/2$	$g_s$
$SU(2)_L$	$W^a$ -Bosonen ( $a = 1 \dots 3$ )	$I^a = \sigma^a/2$	$g$
$U(1)_Y$	$B$ -Boson	$Y/2$	$g'$

$B$  und die  $W^a$  stellen allerdings nicht die physikalisch beobachteten Zustände dar. Stattdessen beobachtet man ein masseloses Photon  $A$  und massive  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen. Ursache dafür ist die spontane Symmetriebrechung im elektroschwachen Sektor, die in Abschnitt 1.3 diskutiert wird.

Zunächst soll jedoch noch die klassische Lagrangedichte des Standardmodells für die erste

Generation vor der Symmetriebrechung angegeben werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{u}_R i \not{D} u_R + \bar{d}_R i \not{D} d_R + \bar{l}_L i \not{D} l_L + \bar{e}_R i \not{D} e_R \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{tr} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

Dabei sind

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu g_\nu^a - \partial_\nu g_\mu^a + g_s f^{abc} g_\mu^b g_\nu^c \quad (1.7)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.8)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.9)$$

die Feldstärketensoren der Eichbosonen und

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s T^a g_\mu^a + i g I^b W_\mu^b + i g' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (1.10)$$

die kovariante Ableitung in der Haber-Kane-Konvention. Die linkhändigen Dubletts sind mit  $l_L = (\nu_e \ e)_L$  und  $q_L = (u \ d)_L$  abgekürzt.

## 1.3. Spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie

Die Motivation für die Brechung der elektroschwachen Symmetrie ist der Wunsch nach einer eichkovarianten Beschreibung der massiven Vektorbosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$ . Technisch wird die Symmetriebrechung durch den *Higgsmechanismus* bewirkt [Hig64, EB64, GHK64]. Dieser erfordert die Existenz eines skalaren *Higgsfeldes*  $h$ , das einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert

$$|\langle 0|h|0\rangle|^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} = \frac{v^2}{2} \neq 0 \quad (1.11)$$

durch die folgende Lagrangedichte<sup>1</sup> erhält:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = |D_\mu h|^2 + \mu^2 |h|^2 - \frac{\lambda}{4} |h|^4 \quad (1.12)$$

Hat  $h$  Ladungen bezüglich  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$ , ist das Vakuum nicht mehr invariant unter diesen Symmetrien — sie sind spontan gebrochen. Diese Tatsache ist die Grundlage des *Glashow-Salam-Weinberg-Modells* [Gla61, Wei67, Sal68], dessen Eigenschaften im Folgenden kurz

<sup>1</sup>Es handelt sich hierbei um die Lagrangedichte einer regulären  $\phi^4$ -Theorie mit einer Teilchenmasse  $\sqrt{-\mu^2}$ .

erläutert werden.

## Massen der Vektorbosonen

Das Higgsfeld soll an die  $W^a$ - und  $B$ -Bosonen koppeln, um auf diese Weise Massen der schwachen Eichbosonen zu erzeugen. Man fordert daher, dass das Higgsfeld ein komplexes Isospin-Dublett mit Hyperladung  $Y = 1$  sei. Die Massenterme gehen dann aus dem kinetischen Teil der Higgs-Lagrangedichte (1.12) hervor, wenn man ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $h = (0, v/\sqrt{2})^T$  im Vakuumzustand annimmt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= |D_\mu h|^2 + \dots \\ &= h^\dagger \left( gI^a W_\mu^a + \frac{Y}{2} g' B_\mu \right) \left( gI^b W^{b\mu} + \frac{Y}{2} g' B^\mu \right) h + \dots \\ &= \frac{v^2}{2} \frac{1}{4} \left[ g^2 (W_\mu^1)^2 + g^2 (W_\mu^2)^2 + (gW_\mu^3 - g' B_\mu)^2 \right] + \dots\end{aligned}\quad (1.13)$$

$W^1$  und  $W^2$  erhalten demnach die gleichen Massen und können zu den experimentell beobachteten Eigenzuständen  $W^\pm$  der elektrischen Ladung mischen. Weiterhin entsteht der Massenterm für das  $Z^0$ -Boson:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad \text{mit der Masse} \quad m_W = g \frac{v}{2} \quad (1.14)$$

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \quad \text{mit der Masse} \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2} \quad (1.15)$$

Die kovariante Ableitung  $D^\mu$  enthält allerdings neben diesen Masseneigenzuständen noch ein zum  $Z^0$  orthogonales Boson, das Photon

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu) \quad (1.16)$$

mit dem assoziierten Generator der elektromagnetischen Ladung

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} \quad (1.17)$$

und der Kopplungskonstante

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.18)$$

Das Photon bleibt masselos, da das Higgsfeld keinen entsprechenden Massenterm generiert. Es kann also als Eichboson einer  $U(1)_Q$ -Restsymmetrie verstanden werden, die bei der Brechung von  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  entsteht. Für gewöhnlich führt man den schwachen Mischungswinkel

$\tan \theta_w = g'/g$  ein und schreibt abkürzend

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$e = g \sin \theta_w. \quad (1.20)$$

## Fermionmassen

In der Lagrangedichte (1.4) fehlen auch die Massenterme der Fermionen. Sie würden die  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  Eichinvarianz verletzen, wie bei der Zerlegung in links- und rechtschirale Anteile offensichtlich wird:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \quad (1.21)$$

Stattdessen können die Fermionmassen aus Kopplungen mit dem Higgsfeld entstehen, den *Yukawakopplungen*:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = y_e \bar{l}_L e_R h + y_u \bar{q}_L u_R h^c + y_d \bar{q}_L d_R h + \text{h.c.} \quad (1.22)$$

wobei  $h^c = i\sigma_2 h^\dagger$  ist. Gepaart mit der Symmetriebrechung generieren diese Kopplungen die Massen der Fermionen:

$$m_f = y_f \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.23)$$

Auch hier gilt die Beschränkung auf nur eine Generation. Bei der Betrachtung aller drei Generationen sind die Yukawakopplungen  $y_f$  dann  $(3 \times 3)$  Matrizen im Generationenraum.

## Das Higgsboson

Entwickelt man das Higgsfeld um seinen Vakuumerwartungswert,

$$h(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H^0(x) + i\chi^0(x)] \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

treten drei Felder  $\phi^+(x)$ ,  $H^0(x)$  und  $\chi^0(x)$  auf, die selber einen verschwindenden Vakuumerwartungswert besitzen. Die Felder  $\phi^+(x)$  und  $\chi^0(x)$  sind jedoch unphysikalisch, da sie jederzeit mit einer kombinierten  $SU(2)_L$ - und  $U(1)_Y$ -Eichtransformation eliminiert werden können. Es verbleibt das neutrale  $H^0$ -Feld, das *Higgsboson*, mit der Masse

$$m_H = \sqrt{2} \mu. \quad (1.25)$$

Die Yukawa-Lagrangedichte (1.22) beschreibt somit auch Wechselwirkungen zwischen den Fermionen und dem Higgsboson.

## 1.4. Quantisierung

Um die klassische Lagrangedichte (1.4) zu quantisieren, müssen die unphysikalischen Freiheitsgrade, die aus der Eichfreiheit herrühren, eliminiert werden [FP67, BRS74, BRS75]. Nur dann können Greensche Funktionen für die Eichbosonen gefunden werden. Eine übliche Methode der *Eichfixierung* ist die  $R_\xi$ -Eichung, bei der ein nicht eichinvarianter Term zur Lagrangedichte hinzuaddiert wird:

$$\mathcal{L}_{R_\xi} = -\frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu - M_Z \xi_Z \chi^0)^2 - \frac{1}{2\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + iM_W \xi_W \phi^+|^2 \quad (1.26)$$

Für Rechnungen im Rahmen der Störungstheorie ist die 't Hooft-Feynman-Eichung  $\xi_A = \xi_Z = \xi_W = 1$  hilfreich.

Bei nicht-abelschen Eichgruppen reicht die Eichfixierung nicht zur Quantisierung aus. Dort ersetzt man passenderweise die Eichsymmetrie durch die BRS-Symmetrie, was die Einführung weiterer, unphysikalischer Felder zur Folge hat. Diese *Geister* genannten Felder absorbieren die unphysikalischen Freiheitsgrade der Eichinvarianz. In dieser Arbeit sind die Geistfelder jedoch nicht relevant und werden daher nicht näher betrachtet.

Abschließend lautet die gesamte Lagrangedichte des Standardmodells:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{R_\xi} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} \quad (1.27)$$

## 1.5. Grenzen des Standardmodells

Zwar sind viele Vorhersagen des Standardmodells an Beschleunigersystemen unzählige Male mit hoher Präzision bestätigt worden [A<sup>+</sup>08]. Dennoch treten einige Probleme zu Tage, für die das Standardmodell keine Lösungen bereithält. Es besteht allerdings die Hoffnung, dass eine *supersymmetrische* Erweiterung die offenen Fragen beantworten kann.

### Fehlende Gravitation

Das Standardmodell erklärt nur drei der vier fundamentalen Kräfte. Die Gravitation kann mit den Mitteln der Quantenfeldtheorie, wie sie im Standardmodell Verwendung findet, nicht beschrieben werden. Im Energiebereich der gewöhnlichen Teilchenphysik ist dies auch nicht notwendigerweise erforderlich, da hier die Gravitation ungleich schwächer als die

anderen Elementarkräfte ist. Dies ändert sich jedoch bei Energien der Planckmassenskala  $M_{\text{Planck}} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ . Dort kann das Standardmodell also nicht mehr gelten. Daher ist eine grundlegendere Theorie gefordert, deren effektives Niedrigenergiemodell das Standardmodell darstellt.

## Große Vereinheitlichung

Ähnlich wie bei der Vereinigung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen, ist man bestrebt, die elektroschwache auch mit der starken Kraft zu vereinen. Die Motivation für eine solche *Große Vereinheitlichung* (GUT) ist allerdings nicht nur ästhetischer Natur. Ziel ist es auch, die Anzahl der freien Parameter des Standardmodells zu reduzieren. Dafür sollten die Kopplungskonstanten der drei Wechselwirkungen bei hohen Energien ( $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16} \text{ GeV}$ ) zu einer Kopplung verschmelzen. Das Standardmodell sagt dies allerdings nicht voraus, während es in supersymmetrischen Theorien mit Superpartnerteilchen in der TeV-Massenskala dafür Möglichkeiten gibt.

## Hierarchieproblem

Zwar sind bei der Planckmassenskala Gravitation und schwache Kraft gleich stark, im Energiebereich der schwersten experimentell beobachteten Elementarteilchen ( $\sim 80 \text{ GeV}$ ) ist die Gravitation jedoch um den Faktor  $10^{32}$  schwächer. Es stellt sich also die Frage nach einer Erklärung für diese kolossale Hierarchie.

Darüber hinaus erfährt die Higgsmasse  $m_H = \sqrt{2}\mu$  quadratisch divergente Strahlungskorrekturen, die man durch einen Cut-off an der Skala  $\Lambda \sim 10^{16} \text{ GeV}$ , bei der neue Physik relevant wird, begrenzt. Daher müsste die Higgsmasse eigentlich in der natürlich erscheinenden Planckmassenskala liegen. Aus Messungen ist aber bekannt, dass die Higgsmasse in der Massenskala der elektroschwachen Symmetriebrechung ( $v/\sqrt{2} = 174 \text{ GeV}$  [A<sup>+</sup>08]) liegt. Das heißt, die Physik an der Skala  $\Lambda$  muss die quadratischen Korrekturen über vierzehn Größenordnungen wieder aufheben, um die physikalische Higgsmasse entstehen zu lassen. Dies stellt das Natürlichkeits- oder Feinabstimmungsproblem der Higgsmasse dar.

Eine Lösung dieses Problems stellt die systematische Auslöschung der divergenten Beiträge in den Higgsstrahlungskorrekturen dar. Dies wird ermöglicht durch die Bereitstellung gleich vieler bosonischer und fermionischer Schleifenbeiträge zur Higgsmasse, wie es in der Supersymmetrie der Fall ist.

### **Dunkle Materie**

Während die vorherigen Punkte theoretische Unzulänglichkeiten des Standardmodells aufgriffen, stellt eine wichtige experimentelle Erkenntnis, nämlich die Existenz von dunkler Materie, das Standardmodell vor ein unlösbares Problem. Keines der Standardmodellteilchen, auch nicht das Neutrino, ist ein geeigneter Kandidat für dunkle Materie. In der Supersymmetrie hingegen kommt das Neutralino, der Superpartner der neutralen Eich- und Higgsbosonen, in Betracht.

### **Anomales magnetisches Moment des Myon**

Ein weiterer experimenteller Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells ist das anomale magnetische Moment des Myons, eine Präzisionsobservable des Standardmodells und die zentrale Größe dieser Arbeit. Wie in Kapitel 3 noch näher erläutert wird, stehen die experimentellen Werte und die Standardmodell-Vorhersagen in einer Diskrepanz von mehr als drei Standardabweichungen. Diese Abweichungen können unter bestimmten Umständen von supersymmetrischen Beiträgen erklärt werden. Ziel dieser Arbeit ist es, die Präzision der theoretischen Vorhersagen über die supersymmetrischen Beiträge zu verbessern.

## 2. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Das *Minimale Supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) ist eine Erweiterung des Standardmodells. Diese Erweiterung beruht auf der Postulierung einer noch nicht beobachteten Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, der *Supersymmetrie*. Im Folgenden wird zunächst näher auf die Eigenschaften dieser Symmetrie und die Beschreibung von Elementarteilchen in ihrem Rahmen eingegangen, bevor die Eigenschaften des MSSM diskutiert werden.

### 2.1. Die Supersymmetrie

Die Supersymmetrietransformation überführt fermionische Zustände in bosonische und umgekehrt:

$$Q|\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle \quad Q|\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle \quad (2.1)$$

Es ist offensichtlich, dass der Operator  $Q$  Spin  $s = 1/2$  tragen muss und nach der Spinordarstellung der Lorentzgruppe transformiert [WZ74]. Damit ist er fermionisch und es gilt

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.2)$$

Nach dem Coleman-Mandula-Theorem [CM67] stellt ein fermionischer Operator die einzig mögliche nichttriviale Erweiterung einer relativistischen Quantenfeldtheorie um eine innere Symmetrie dar. Für die  $Q_\alpha$  bzw.  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  folgt [HLS75], dass sie die Poincaréalgebra (1.1) um die folgenden Relationen zur *Supersymmetriealgebra* erweitern:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \quad (2.3)$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0 \quad (2.4)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass es bis zu  $N = 8$  solcher Operatoren  $Q$  geben kann. Allerdings beschreiben Supersymmetrien mit  $N > 1$  keine chiralen Felder. Die folgende Darstellung beschränkt sich daher weiterhin auf  $N = 1$ .

Einteilchenzustände lassen sich bezüglich der Supersymmetrietransformation in *Supermultipletts* einordnen. Die Elemente dieser Multipletts sind gegenseitige *Superpartner*, zwischen denen  $Q$  und  $\bar{Q}$  vermitteln. Aus (2.4) wird deutlich, dass der  $P^2$ -Operator mit  $Q$  vertauscht und somit Teilchen des gleichen Supermultipletts die gleiche Masse haben müssen. Das wird allerdings in der Natur nicht beobachtet, die Superpartner der Standardmodell-Teilchen müssen wesentlich größere Massen besitzen. Die Supersymmetrie ist also — falls sie in der Natur existiert — in dieser Hinsicht gebrochen, worauf weiter unten noch näher eingegangen wird. Eine weitere wichtige Eigenschaft des Supermultipletts ist die Tatsache, dass es immer gleichviele fermionische wie bosonische Freiheitsgrade enthält. So befinden sich zum Beispiel im *chiralen Supermultiplett* ein Weylspinor ( $n_F = 2$ ) und ein komplexer Skalar ( $n_B = 2$ ). Darüber hinaus ist zu bemerken, dass die Supersymmetrietransformation  $Q$  mit den Generatoren der Eichgruppen kommutiert. Die Elemente der Supermultipletts haben also gleiche Ladungen und wechselwirken gleich.

### 2.2. Superfelder auf dem Superraum

Die Erzeugenden der Supersymmetriegruppe sind die Operatoren  $Q_\alpha$ ,  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  und  $P^\mu$ . Eine allgemeine Transformation wird dann durch das Gruppenelement

$$G(c_\mu, \xi^\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}) = e^{i(c_\mu P^\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}})} \quad (2.5)$$

beschrieben. Dabei sind  $\xi^\alpha$  und  $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$  fermionische Koordinaten (Grassmannzahlen). Das Tupel  $(c_\mu, \xi^\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}})$  ist Element des *Superraumes*, einem Produktraum des Minkowskiraumes mit zwei Spinorräumen. Die Elemente dieses Raumes transformieren sich dabei auf die folgende Art und Weise:

$$(x'_\mu, \theta', \bar{\theta}') = (x_\mu + i\xi\sigma_\mu\bar{\theta} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\theta, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (2.6)$$

Den Superraum nutzt man zur Beschreibung der Supermultipletts durch *Superfelder*  $F$  [FWZ74]. Dies sind Funktionen, die in den fermionischen Koordinaten  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  analytisch sind und sich unter der Supersymmetrietransformation wie folgt verhalten:

$$F'(x', \theta', \bar{\theta}') = F(x, \theta, \bar{\theta}) \quad \text{mit} \quad F' = GF \quad (2.7)$$

Wegen der Nilpotenz von  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  lassen sich Superfelder in eine endliche Anzahl von Komponentenfelder entwickeln:

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & A(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\mu}(x) + i\theta\theta M(x) + i\bar{\theta}\bar{\theta}N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Man erkennt, dass ein allgemeines Superfeld 16 bosonische und 16 fermionische Freiheitsgrade enthält. Um irreduzible Supermultipletts zu beschreiben, muss man demnach weitere Bedingungen an das Superfeld stellen.

## Chirale Superfelder

Analog zu den Eichgruppen kann man in der Supersymmetriegruppe chiral kovariante Ableitungen einführen:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu \quad (2.9)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\beta (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (2.10)$$

Damit lassen sich kovariante Bedingungen zur Reduktion der Freiheitsgrade eines Superfeldes stellen:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad D_\alpha \Phi^\dagger = 0 \quad (2.11)$$

$\Phi$  heißt *chirales*,  $\Phi^\dagger$  *antichirales* Superfeld. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu} \phi(x, \theta) \quad (2.12)$$

$$\text{mit} \quad \phi(x, \theta) = A(x) + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F(x). \quad (2.13)$$

Analoges gilt für  $\Phi^\dagger$ .  $A$  ist ein komplexes Skalarfeld und  $\psi$  ein Weylspinor.  $F$  ist ein Hilfsfeld, das für die Erfüllung der Supersymmetriealgebra im Off-Shell-Fall benötigt wird, in einer supersymmetrischen Lagrangedichte aber keine Dynamik erhält und somit eliminiert werden kann. Ein chirales Superfeld beschreibt also genau das zuvor erwähnte chirale Supermultiplett. Eine allgemeine supersymmetrische Lagrangedichte aus chiralen und antichiralen Superfeldern lautet

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \sum_i \Phi_i^\dagger \Phi_i + \int d^2\theta (W(\Phi_i) + \text{h.c.}). \quad (2.14)$$

$W$  ist eine zunächst beliebige analytische Funktion der chiralen Superfelder  $\Phi_i$  und wird *Superpotential* genannt. Um Renormierbarkeit zu gewährleisten, darf das Superpotential jedoch keine Terme mit Massendimension größer als vier enthalten. Daher kann es nur ein Polynom maximal dritten Grades sein.

## Vektorsuperfelder und Eichkopplungen

*Vektorsuperfelder*  $V$  erfüllen die Bedingung

$$V^\dagger = V. \quad (2.15)$$

## 2. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

---

In der allgemeinen Zerlegung eines Superfeldes (2.8) müssen bei Vektorsuperfeldern also die Komponentenfelder  $A, v_\mu, D$  reell sein und  $\chi^\dagger = \bar{\mu}, \rho^\dagger = \bar{\lambda}, M^\dagger = N$  gelten.

Nach der Definition (2.15) ist sowohl ein Produkt als auch eine Summe eines chiralen mit einem antichiralen Superfeld ein Vektorsuperfeld. Dies lässt uns die Transformation

$$V \rightarrow V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.16)$$

eines Vektorsuperfeldes  $V$  mit einem chiralen Superfeld  $\Lambda$  definieren. Diese Transformation kann als *Supereichtransformation* bezeichnet werden, denn sie wirkt wie eine Eichtransformation auf das Komponentenfeld  $v_\mu$ . Weiterhin kann man durch Wahl der Wess-Zumino-Eichung die Komponentenfelder  $C, \chi, M$  und deren hermitesch-konjugierte Felder eliminieren. In dieser Eichung lässt sich also ein Vektorsuperfeld folgendermaßen ausdrücken:

$$V_{\text{WZ}}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.17)$$

Bei  $D$  handelt es sich wiederum um ein Hilfsfeld. Damit beschreibt ein Vektorsuperfeld das *Vektorsupermultiplett* bestehend aus dem Vektorboson  $v_\mu$  und den Weylspinoren  $\lambda, \bar{\lambda}$ .

Die Supereichtransformation lässt sich auch für chirale Superfelder definieren. Mit  $\Lambda = \Lambda^a T^a$  und  $V = T^a V^a$  lautet die allgemeine, nicht-abelsche Eichtransformation für Superfelder:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow e^{-i2g\Lambda}\Phi \\ \Phi^\dagger &\rightarrow \Phi^\dagger e^{i2g\Lambda^\dagger} \\ e^{2gV} &\rightarrow e^{-i2g\Lambda^\dagger} e^{2gV} e^{i2g\Lambda} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Damit ist das Produkt  $\Phi^\dagger e^{2gV} \Phi$  eichinvariant. Es beschreibt analog zur minimalen Kopplung die Wechselwirkung der Vektorsuperfelder mit den chiralen Superfeldern.

Zur Konstruktion einer eichinvarianten Lagrangedichte fehlt lediglich noch der kinetische Term der Vektorsuperfelder. Hierfür werden die chirale bzw. antichirale Feldstärke definiert:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D\overline{D}}(e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}) \quad (2.19)$$

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D\overline{D}((\overline{D}_{\dot{\alpha}} e^{2gV})e^{-2gV}), \quad (2.20)$$

Mit ihnen lautet die eichinvariante Lagrangedichte der Vektorsuperfelder:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16g^2} \int d^2\theta \text{tr} W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \quad (2.21)$$

So lässt sich abschließend eine allgemeine renormierbare und eichinvariante supersymme-

trische Lagrangedichte mit den chiralen Superfeldern  $\Phi_i$  und den Vektorsuperfeldern  $V^a$  angeben:

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY,allg.}} = \int d^4\theta \left( \Phi_i^\dagger e^{2gV} \Phi_i \right) + \left[ \int d^2\theta \left( \frac{1}{16g^2} \text{tr} W^\alpha W_\alpha + W(\Phi_i) \right) + \text{h.c.} \right] \quad (2.22)$$

mit dem Superpotential

$$W(\Phi_i) = c_k \Phi_k + \frac{m_{kl}}{2} \Phi_k \Phi_l + \frac{y_{klm}}{3!} \Phi_k \Phi_l \Phi_m \quad (2.23)$$

## 2.3. Definition des MSSM

Das MSSM ist definiert als die kleinste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells. Dabei erhält jedes Standardmodellteilchen  $\phi$  genau einen Superpartner  $\tilde{\phi}$ . Ein supersymmetrisches Modell mit weniger Feldern ist nicht möglich. So können zum Beispiel die Standardmodellfermionen nicht als Superpartner der Eichbosonen (*Gauginos*), fungieren, weil sie zu anderen Darstellungen der Eichgruppen als die Eichbosonen gehören. Ebenso wenig können die Superpartner der Neutrinos (*Sneutrinos*) die Rolle des Higgsboson übernehmen, da sie Leptonzahl tragen und somit die Massenterme der Fermionen die Leptonzahl verletzen.

### Zwei Higgsdoublets

Das Higgsboson muss also auch im MSSM explizit eingeführt werden. Wie die anderen Teilchen erhält es einen Superpartner, das *Higgsino*. Allerdings führt die Existenz von nur einem Higgsdoublet und seinem Higgsino zu einer Eichanomalie im elektroschwachen Sektor. Dies kann durch die Einführung zweier Higgsdoublets mit  $Y = \pm 1$  und dazugehörigen Higgsinos behoben werden. Ein weiterer Grund für die Existenz von mindestens zwei Higgsdoublets im MSSM sind die Yukawakopplungen, die aus den trilinearen Termen des Superpotentials (2.23) stammen. Die entsprechenden Terme  $y_e H L E$  und  $y_d H Q D$  wären erlaubt, nicht jedoch  $y_u H^\dagger Q U$ , da das Superpotential wie oben erwähnt analytisch in den chiralen Superfeldern sein muss.

### Superfelder des MSSM

Somit erhält man folgende Superfelder mit deren Komponenten, wobei bei Leptonen und Quarks nur die erste Generation angegeben sei:

Superfeld	Komponenten	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$Y$
$G^a$	$\tilde{g}^a, g_\mu^a$	<b>8</b>	<b>1</b>	0
$V^a$	$\tilde{\lambda}^a, W_\mu^a$	<b>1</b>	<b>3</b>	0
$V'$	$\tilde{\lambda}', B_\mu$	<b>1</b>	<b>1</b>	0
$H_d$	$h_d, \tilde{h}_d$	<b>1</b>	<b>2</b>	-1
$H_u$	$h_u, \tilde{h}_u$	<b>1</b>	<b>2</b>	1
$L$	$\tilde{l}_L, l_L$	<b>1</b>	<b>2</b>	-1
$E$	$\tilde{e}_R^\dagger, e_R$	<b>1</b>	<b>1</b>	-2
$Q$	$\tilde{q}_L, q_L$	<b>3</b>	<b>2</b>	1/3
$U$	$\tilde{u}_R^\dagger, u_R$	$\bar{\mathbf{3}}$	<b>1</b>	-4/3
$D$	$\tilde{d}_R^\dagger, d_R$	$\bar{\mathbf{3}}$	<b>1</b>	2/3

## R-Parität

Bei der Konstruktion einer Lagrangedichte mit diesen Feldern nach (2.22) muss beachtet werden, dass ein allgemeines Superpotential die Terme

$$\begin{aligned}\Delta W_L &= \frac{1}{2}g_{ijk}L_iL_jE_k + g'_{ijk}L_iQ_jD_k + \mu' L_iH_u \\ \Delta W_B &= \frac{1}{2}g''_{ijk}U_iD_jD_k\end{aligned}$$

enthalten kann. Diese Terme verletzen jedoch die Leptonenzahl- bzw. Baryonenzahlerhaltung und stehen damit im Gegensatz zur experimentellen Beobachtung. Insbesondere würde die Existenz solcher Terme den Zerfall des Protons in Leptonen und Mesonen ermöglichen und seine Lebensdauer drastisch verkürzen. Man führt daher die Erhaltungsgröße *Materieparität* ein, eine multiplikative Quantenzahl:

$$P_M = (-1)^{3(B-L)} \quad (2.24)$$

Quark- und Leptonen-Superfelder erhalten demnach  $P_M = -1$ , die Higgs- und Vektorsuperfelder  $P_M = +1$ . Eine solche diskrete Symmetrie lässt sich auch auf Teilchenniveau einführen. Deren Quantenzahl heißt dann *R-Parität* und ist definiert als

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2S}. \quad (2.25)$$

Man postuliert, dass Materieparität- bzw. R-Parität-verletzende Prozesse nicht erlaubt sind. Unter dieser Bedingung lautet die allgemeinste supersymmetrischen Lagrangedichte der

MSSM-Superfelder:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SUSY}} = & \int d^4\theta \left( Q^\dagger e^{2A} Q + U^\dagger e^{2A} U + D^\dagger e^{2A} D \right. \\
 & \left. + L^\dagger e^{2A} L + E^\dagger e^{2A} E + H_d^\dagger e^{2A} H_d + H_u^\dagger e^{2A} H_u \right) \\
 & + \left[ \int d^2\theta \left( \frac{1}{16g_s^2} \text{tr} W_s^\alpha W_{s\alpha} + \frac{1}{16g^2} \text{tr} W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{16g'^2} W'^\alpha W'_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + y_d H_d Q D + y_u H_u Q U + y_e H_d L E - \mu H_d H_u \right) + \text{h.c.} \right]
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

mit den chiralen Feldstärken  $W_s^\alpha, W^\alpha, W'^\alpha$  der Vektorsuperfelder  $G, V, V'$  sowie

$$A = g_s T^a G^a + g I^a V^a + g' \frac{Y}{2} V' \tag{2.27}$$

Wie zuvor ist auch hier nur eine Generation explizit angegeben. Analog zum Standardmodell sind die Yukawakopplungen  $y_f$  im MSSM eigentlich  $(3 \times 3)$  Matrizen im Generationenraum.

## 2.4. Brechung der Supersymmetrie

Da man keine gleichschweren Superpartnerpaare in der Natur beobachtet, müssen die Superpartner der Standardmodellteilchen wesentlich höhere Massen haben. Eine Brechung der Supersymmetrie ist demnach erforderlich.

Aus theoretischer Sicht wäre eine spontane Brechung durch ein asymmetrisches Vakuum wünschenswert, denn so könnte die Lagrangedichte des MSSM weiterhin invariant unter Supersymmetrietransformationen bleiben. Um das Natürlichkeitskriterium der Superpartnermassen zu erfüllen, müsste eine solche Brechung bei der Energieskala der Symmetriebrechung der schwachen Wechselwirkung stattfinden. Dies ist allerdings phänomenologisch ausgeschlossen. Die Supersymmetrie wird daher durch explizite Terme in der Lagrangedichte gebrochen. Um die Natürlichkeit zu gewährleisten, dürfen durch die Brechung keine quadratischen Divergenzen in den Strahlungskorrekturen der Superpartnermassen auftreten. Man spricht von einer *sanften Brechung* [DG81]. Die allgemeinsten eichinvarianten und R-Parität-erhaltenden Terme, die eine sanfte Brechung vermitteln, lauten [GG82]:

$$\mathcal{L}_{\text{soft,allg.}} = -\phi_i^\dagger (m^2)_{ij} \phi_j - \left( c_i \phi_i + \frac{b_{ij}}{2} \phi_i \phi_j + \frac{a_{ijk}}{3!} \phi_i \phi_j \phi_k - \frac{M}{2} \tilde{\lambda}^a \tilde{\lambda}^a + \text{h.c.} \right) \tag{2.28}$$

$\phi$  ist die Skalkomponente eines chiralen Superfeldes,  $\tilde{\lambda}^a$  die Spinorkomponente eines Vektorsuperfeldes.

Für die Felder des MSSM kann man also aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -m_{\tilde{q}}^2 |\tilde{q}_L|^2 - m_{\tilde{u}}^2 |\tilde{u}_R|^2 - m_{\tilde{d}}^2 |\tilde{d}_R|^2 - m_{\tilde{l}}^2 |\tilde{l}_L|^2 - m_{\tilde{e}}^2 |\tilde{e}_L|^2 \\
 & - m_1^2 |h_d|^2 - m_2^2 |h_u|^2 - (m_3^2 h_d h_u + \text{h.c.}) \\
 & - (\lambda_d A_d h_d \tilde{q}_L \tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u A_u h_u \tilde{q}_L \tilde{u}_R^\dagger + \lambda_e A_e h_d \tilde{l}_L \tilde{e}_R^\dagger + \text{h.c.}) \\
 & + \frac{1}{2} (M_1 \tilde{\lambda}' \tilde{\lambda}' + M_2 \tilde{\lambda} \tilde{\lambda} + M_3 \tilde{\lambda}_s \tilde{\lambda}_s + \text{h.c.})
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Es ist zu bemerken, dass die sanfte Brechung für den Großteil der freien Parameter des MSSM verantwortlich ist, wie man sich bei einem Vergleich mit der supersymmetrischen Lagrangedichte (2.26) überzeugen kann.

Mit (2.26) und (2.29) erhält man nun die gesamte klassische Lagrangedichte des MSSM:

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \tag{2.30}$$

Zur Quantisierung kann die aus dem Standardmodell bekannte Methode über Eichfixierung und BRS-Symmetrie angewendet werden.

## 2.5. Teilcheninhalt und Masseneigenzustände

Die gegenüber dem Standardmodell hinzugekommenen Teilchen verdienen eine genauere Betrachtung, vor allem hinsichtlich ihrer Massen. So liefert die Verdopplung der Higgsdubletts weitere skalare Moden, die zu massiven Higgsbosonen mischen. Ähnliche Mischungen treten bei den Superpartnern der Higgs- und Eichbosonen und denen der Fermionen auf.

### Higgssektor

Die Higgsterme in (2.26) und (2.29) liefern ein Potential, das analog zur Situation im Standardmodell einen nichttrivialen Vakuumzustand der skalaren Higgsdubletts beschreibt. Es ist dabei hervorzuheben, dass dies ohne den sanfte Brechungsterm nicht möglich ist und somit die elektroschwache Symmetriebrechung auch nur bei Supersymmetriebrechung eintritt.

Die beiden Higgsdubletts erhalten also jeweils einen Vakuumerwartungswert. Die physikalischen Felder werden deutlich, wenn man eine Entwicklung um den Vakuumerwartungswert durchführt:

$$h_d(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_d + \phi_d^0 - i\chi_d^0) \\ -\phi_d^-(x) \end{pmatrix} \quad h_u(x) = \begin{pmatrix} \phi_u^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_u + \phi_u^0 - i\chi_u^0) \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Die Massen der  $\phi_i^\pm$  und  $\chi_i^0$  erhält man durch zweimaliges Ableiten des Higgspotentials in der

Lagrangedichte (2.30). Diese Felder sind allerdings nicht die Masseneigenzustände. Vielmehr erhält man nach der Diagonalisierung der Massenmatrizen:

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_d^0 \\ \chi_u^0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_d^\pm \\ \phi_u^\pm \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_d^0 \\ \phi_u^0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Dabei sind

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d} \quad \text{mit} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad (2.35)$$

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \cdot \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_Z^2 - M_Z^2} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0. \quad (2.36)$$

Von den acht skalaren Feldern sind die Goldstonebosonen  $G^0$  und  $G^\pm$  unphysikalisch, denn sie bilden wie im Falle des Standardmodells die longitudinalen Moden der massiven Vektorbosonen. Es verbleiben fünf massive Higgsbosonen  $A^0$ ,  $H^\pm$ ,  $H^0$ ,  $h^0$  im MSSM.

## Charginos

Wie die Eichbosonen der  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$  mischen auch die dazugehörigen Gauginos dank der elektroschwache Symmetriebrechung zu Eigenzuständen der elektrischen Ladung. Die geladenen *Winos* sind demnach:

$$\tilde{\lambda}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\lambda}^1 \mp i\tilde{\lambda}^2) \quad (2.37)$$

Sie bilden mit den zwei geladenen Higgsinos gemischte Masseneigenzustände. Dies wird durch einen Blick auf den entsprechenden Teil der Lagrangedichte (2.30) verdeutlicht, nachdem die Higgsfelder ihre Vakuumerwartungswerte erlangt haben:

$$\mathcal{L}_{\text{chargino}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(v_d \tilde{\lambda}^+ \tilde{h}_d^- + v_u \tilde{\lambda}^- \tilde{h}_u^+) - (M_2 \tilde{\lambda}^+ \tilde{\lambda}^- + \mu \tilde{h}_d^- \tilde{h}_u^+) + \text{h.c.} \quad (2.38)$$

$$= -(\psi^-)^T X \psi^+ + \text{h.c.} \quad (2.39)$$

## 2. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

---

Dabei ist

$$\psi^+ := \begin{pmatrix} -i\tilde{\lambda}^+ \\ \tilde{h}_u^+ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi^- := \begin{pmatrix} -i\tilde{\lambda}^- \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

$X$  ist die asymmetrische Massenmatrix. Sie lautet, ausgedrückt durch Standardparameter des MSSM:

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W \sin \beta \\ \sqrt{2}M_W \cos \beta & \mu \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Es wird nun deutlich, dass die Winos und geladenen Higgsinos zu *Charginos* mischen. Um deren Masseneigenzustände zu ermitteln, diagonalisiert man die Massenmatrix:

$$U^* X V^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^\pm}, m_{\chi_2^\pm}) \quad (2.42)$$

Mit den Matrizen  $U$  und  $V$  erhält man auch die Masseneigenzustände der Charginos ( $k = 1, 2$ ):

$$\tilde{\chi}_k^+ = V_{kl} \psi_l^+ \quad \text{und} \quad \tilde{\chi}_k^- = U_{kl} \psi_l^- \quad (2.43)$$

Um die Korrespondenz der Wechselwirkungs- mit den Masseneigenzuständen zu verdeutlichen, empfiehlt es sich, die Weylspinoren  $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$ ,  $\tilde{\lambda}^\pm$  und  $\tilde{h}^\pm$  zu Diracspinoren zusammenzufassen:

$$\chi_k^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_k^+ \\ \overline{\tilde{\chi}_k^+} \end{pmatrix}, \quad \lambda^+ = \begin{pmatrix} -i\tilde{\lambda}^+ \\ i\overline{\tilde{\lambda}^+} \end{pmatrix}, \quad h^+ = \begin{pmatrix} \tilde{h}_u^+ \\ \overline{\tilde{h}_d^+} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

Mit den Chiralitätsprojektoren  $P_{L,R}$  lässt sich dann schreiben:

$$\chi_k^+ = (V_{k1}P_L + U_{k1}^*P_R)\lambda^+ + (V_{k2}P_L + U_{k2}^*P_R)h^+ \quad (2.45)$$

## Neutralinos

Eine ähnliche Struktur lässt sich bei den ungeladenen Gauginos und Higgsinos finden. Man definiert wiederum zur Vereinfachung der Notation den Vektor:

$$(\psi^0)^T := \left( -i\tilde{\lambda}', -i\tilde{\lambda}^3, \tilde{h}_d^0, \tilde{h}_u^0 \right) \quad (2.46)$$

Nach der elektroschwachen Symmetriebrechung lauten dann die relevanten Terme der Lagrangedichte (2.30):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutralino}} &= -\frac{g}{2}\tilde{\lambda}^3(v_d\tilde{h}_d^0 - v_u\tilde{h}_u^0) + \frac{g'}{2}\tilde{\lambda}'(v_d\tilde{h}_d^0 - v_u\tilde{h}_u^0) + \mu\tilde{h}_d^0\tilde{h}_u^0 \\ &\quad - \frac{M_2}{2}\tilde{\lambda}^3\tilde{\lambda}^3 - \frac{M_1}{2}\tilde{\lambda}'\tilde{\lambda}' + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$= -\frac{1}{2}(\psi^0)^T Y \psi^0 + \text{h.c.} \quad (2.48)$$

$Y$  ist die *Neutralino*-Massenmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z c_\beta s_w & M_Z s_\beta s_w \\ 0 & M_2 & M_Z c_\beta c_w & -M_Z s_\beta c_w \\ -M_Z c_\beta s_w & M_Z s_\beta s_w & 0 & -\mu \\ M_Z c_\beta c_w & -M_Z s_\beta c_w & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

mit den Abkürzungen  $s_w = \sin \theta_w$ ,  $c_w = \cos \theta_w$ ,  $s_\beta = \sin \beta$ ,  $c_\beta = \cos \beta$ . Sie kann durch eine Matrix  $Z$  diagonalisiert werden:

$$Z^* Y Z^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^0}, m_{\chi_2^0}, m_{\chi_3^0}, m_{\chi_4^0}) \quad (2.50)$$

$Z$  vermittelt dann auch zwischen den Wechselwirkungs- und Masseneigenzuständen der Neutralinos ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\tilde{\chi}_i^0 = Z_{ij} \psi_j^0 \quad (2.51)$$

Analog zu den Charginos sollen die Majoranaspinooren

$$\chi_i^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_i^0 \\ \overline{\tilde{\chi}_i^0} \end{pmatrix}, \quad \lambda' = \begin{pmatrix} -i\tilde{\lambda}' \\ i\overline{\tilde{\lambda}'} \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} -i\tilde{\lambda}^3 \\ i\overline{\tilde{\lambda}^3} \end{pmatrix}, \quad h_{d,u}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{d,u}^0 \\ \overline{\tilde{h}_{d,u}^0} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

eingeführt werden und den Zusammenhang zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen explizit angeben:

$$\begin{aligned} \chi_i^0 &= (Z_{i1} P_L + Z_{i1}^* P_R) \lambda' + (Z_{i2} P_L + Z_{i2}^* P_R) \lambda^3 \\ &\quad + (Z_{i3} P_L + Z_{i3}^* P_R) h_d^0 + (Z_{i4} P_L + Z_{i4}^* P_R) h_u^0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

## Sfermionen

Wie bei den bislang betrachteten Superpartnerteilchen haben die Massen der *Sfermionen* ihren Ursprung einerseits in der sanften Brechung (2.29) und andererseits im supersymmetrischen Teil (2.26) der Lagrangedichte. Aus der sanften Brechung kommen explizite Massenterme und

## 2. Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

---

die trilinearen  $A$ -Terme. Aus dem Superpotential stammen die Yukawakopplungen, die sich die Sfermionen mit ihren fermionischen Superpartnern teilen. Darüber hinaus tragen noch die Eichkopplungsterme der Form  $F^\dagger e^{2A} F$  bei.

Zusammengefasst lassen sich die Massenterme für das Sfermion  $\tilde{f}$  so schreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{sfermion}} = -\tilde{f}^\dagger M_{\tilde{f}}^2 \tilde{f} \quad \text{mit} \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Die Massenmatrix ist dann

$$M_{\tilde{f}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{f}_L}^2 + m_f^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (I_f^3 - Q_f s_w^2) & m_f (A_f^* - \mu b) \\ m_f (A_f - \mu^* b) & m_{\tilde{f}_R}^2 + m_f^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q_f s_w^2 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Dabei ist  $b = \tan \beta$  für down-artige und  $b = \cot \beta$  für up-artige Sfermionen. Die Superpartner der links- und rechtshändigen Fermionen mischen also auch zu Masseneigenzuständen, mit der Ausnahme des nur einfach vorhandenen *Sneutrinos*.

Die Sfermion-Massenmatrix wird diagonalisiert durch

$$W^{\tilde{f}} M_{\tilde{f}}^2 W^{\tilde{f}\dagger} = \text{diag}(m_{\tilde{f}_1}, m_{\tilde{f}_2}). \quad (2.56)$$

Damit erhält man die Masseneigenzustände ( $m = 1, 2$ )

$$\tilde{f}_m = W_{m\tilde{f}}^{\tilde{f}} \tilde{f}_{\tilde{f}}. \quad (2.57)$$

Es sollte noch erwähnt werden, dass aufgrund der drei Generationen die  $\tilde{f}$  strenggenommen sechsdimensionale Vektoren sind. Die  $m_f$  sind dann  $(3 \times 3)$  Matrizen im Generationenraum, so dass  $M_{\tilde{f}}^2$  eine  $(6 \times 6)$  Matrix ist, die prinzipiell auch Mischungen zwischen den Generationen ermöglichen würde. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht betrachtet.

# 3. Das magnetische Dipolmoment des Myon

## 3.1. Das anomale magnetische Moment $a_\mu$

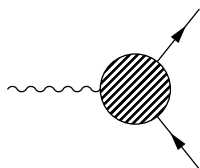
Die Wechselwirkung zwischen einem elektrisch geladenen Elementarteilchen mit dem Bahndrehimpuls  $L = \hbar l$  und einem Magnetfeld  $B$  wird durch den Hamiltonoperator  $H = -\vec{\mu}\vec{B}$  beschrieben. Dabei ist  $\mu$  das *magnetische Dipolmoment* des Teilchens:

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m} \vec{l}. \quad (3.1)$$

Als inhärenter Drehimpuls eines Teilchens erzeugt der Spin  $s$  in ähnlicher Weise ein magnetisches Moment. Den einzigen Unterschied macht der *gyromagnetische Faktor*  $g$  aus:

$$\vec{\mu} = g \frac{e\hbar}{2m} \vec{s} \quad (3.2)$$

Im Folgenden soll der  $g$ -Faktor für ein geladenes Fermion ( $s = \frac{1}{2}$ ) bestimmt werden. Die Streuamplitude des Teilchenstroms  $J^\mu$  mit einem äußeren elektromagnetischen Feld lautet in der Kovariantenzerlegung:



$$\langle p' | J^\mu | p \rangle = -ie \bar{u}(p') [\gamma^\mu F_E(q^2) + (p + p')^\mu F_M(q^2) + \dots] u(p) \quad (3.3)$$

Dabei sind  $p^2 = p'^2 = m^2$  die äußeren Impulse des Fermions und  $q = p' - p$  der Impulsübertrag an das Photonfeld.  $F_E(q^2)$  und  $F_M(q^2)$  sind die elektrischen bzw. magnetischen Formfaktoren, auch Dirac- und Pauli-Formfaktoren genannt. Für die Bestimmung von  $g$  sind sie im statischen Limes  $q^2 \rightarrow 0$  zu betrachten.

Die Ladungsrenormierungsbedingung fordert, dass

$$F_E(0) + 2mF_M(0) = 1 \quad (3.4)$$

### 3. Das magnetische Dipolmoment des Myon

---

Berechnet man damit die Streuamplitude (3.3) im nichtrelativistischen Grenzfall und vergleicht mit (3.2), dann erhält man

$$g = 2(1 - 2mF_M(0)). \quad (3.5)$$

Die Kopplung  $\bar{u}\gamma^\mu u A_\mu$  liefert also  $g = 2$ . Dieser Term entspricht genau dem Wechselwirkungsterm der QED-Lagrangedichte, also der Tree-Level-Kopplung, so dass  $F_M(0) \neq 0$  nur unter Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen auftreten kann. Man schreibt daher

$$g = 2(1 + a_f) \quad (3.6)$$

und nennt  $a_f = -2mF_M(0)$  das *anomale magnetische Moment* des Teilchens  $f$ . Diese Größe ist eine Präzisionsobservable in der Elementarteilchenphysik, da sie sich zur Überprüfung von störungstechnisch berechneten Strahlungskorrekturen eignet.

Neben dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons ist vor allem das Moment des Myons eine viel untersuchte Größe. Da nämlich Strahlungskorrekturen mit massiven Teilchen der Masse  $M$  (beispielsweise schwache Vektorbosonen) grundsätzlich mit  $m_f^2/M^2$  unterdrückt werden, fallen sie bei  $a_\mu$  um den Faktor  $m_\mu^2/m_e^2 \approx 43000$  mehr ins Gewicht als bei  $a_e$ . Somit bietet  $a_\mu$  eher die Möglichkeit, Hinweise auf neue Physik zu liefern<sup>1</sup>.

## 3.2. Messungen und Standardmodell-Berechnungen

Als Präzisionsobservable hat  $a_\mu$  eine reichhaltige Geschichte in Experiment und Theorie. Zuletzt wurde sie vom Brookhaven-Experiment E821 [B<sup>+</sup>06] mit der bemerkenswerten Präzision von 0,54 ppm bestimmt:

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116\,592\,080(63) \cdot 10^{-11} \quad (3.7)$$

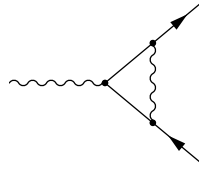
Dem gegenüber steht die Vorhersage des Standardmodells. Sie ergibt sich aus virtuellen Strahlungskorrekturen, die durch eine störungstheoretische Entwicklung in Schleifen ermittelt werden. Dabei unterscheidet man verschiedene Klassen von Beiträgen:

- *Universelle QED-Beiträge*: Diese Gruppe besteht aus Diagrammen mit virtuellen Photonen und Schleifeneinsetzungen mit dem gleichen Lepton wie dem äußeren, in diesem Fall also mit dem Myon. Diese Beiträge, auch *Ein-Flavour-QED*-Beiträge genannt, sind unabhängig von Teilchenmassen und daher auch universell für alle Leptonen gültig. Den weitaus größten Anteil, sowohl in dieser Gruppe als auch insgesamt, liefert das

---

<sup>1</sup>Prinzipiell wäre demnach auch  $a_\tau$  von Interesse, allerdings ist die Lebensdauer des Tauons zu kurz, um entsprechende Messungen durchzuführen.

Einschleifendiagramm [Sch49]:



$$a^{\text{QED 1L}} = \frac{e^2}{8\pi^2} \quad (3.8)$$

- *Massenabhängige QED-Beiträge:* In dieser Klasse sind Schleifenbeiträge mit virtuellen Photonen und anderen Leptonen zusammenfasst. Sie treten erst ab dem Zweischleifen-niveau auf. Beim Myon kann man zwischen Schleifeneinsetzungen mit dem leichteren Elektron und dem schwereren Tauon unterscheiden. Erstere führen auf große Logarithmen der Form  $\log(m_\mu/m_e)$ , während letztere vergleichsweise geringe Korrekturen aufbringen, die bei der Präzision des Brookhaven-Experiments jedoch relevant sind. Die Ungenauigkeiten dieser Klasse von Beiträgen stammen aus der Ungenauigkeit der Massenverhältnisse  $m_\mu/m_e$  und  $m_\mu/m_\tau$ .

Insgesamt stellen die QED-Beiträge die größten Korrekturen zu  $a_\mu$  dar. Zum heutigen Zeitpunkt sind sie auf Dreischleifenniveau analytisch [LR96] und auf Vierschleifenniveau numerisch [AHKN08] bekannt.

- *Hadronische Vakuumpolarisation:* Da Quarks bei den betrachteten Energien keine freien Teilchen sind, sondern hadronisieren, lassen sich ihre Beiträge zu  $a_\mu$  nicht durch eine Schleifenentwicklung ermitteln. Im Falle der Vakuumpolarisation kann man sich allerdings behelfen und die relevante Photon-Selbstenergiefunktion aus Messungen von  $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$  bestimmen [GDR69].
- *Hadronische Photon-Photon-Streuung:* Im Gegensatz zur Vakuumpolarisation kann sich die hadronische Photon-Photon-Streuung nicht auf experimentelle Daten berufen. Hier muss man sich daher auf effektive Niedrigenergiebeschreibungen der QCD wie die *Chirale Störungstheorie* (ChPT) stützen, in denen der Hauptbeitrag zu dieser Klasse von Diagrammen durch den Austausch von  $\pi^0$  und anderen Mesonen beschrieben wird. Insgesamt sind die hadronischen Beiträge für den Großteil der Ungenauigkeit des theoretischen Ergebnisses  $a_\mu$  verantwortlich.
- *Elektroschwache Beiträge:* Aufgrund der hohen Masse der  $W^\pm$ -,  $Z^0$ - und Higgsbosonen sind diese Beiträge stark unterdrückt, jedoch beim Brookhaven-Experiment wegen dessen hoher Präzision erstmals nicht vernachlässigbar. Generell lässt sich diese Klasse von Diagrammen in bosonische Beiträge und Beiträge mit geschlossenen Fermionschleifen unterteilen. Letztere sind besonders kritisch, da hier Auslöschungen

### 3. Das magnetische Dipolmoment des Myon

---

mit den verwandten Quarkschleifenbeiträgen zur Erhaltung der Anomaliefreiheit in der  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  Eichtheorie stattfinden [Adl69, BJ69].

Die Ungenauigkeit der elektroschwachen Beiträge ist hauptsächlich durch die Ungenauigkeit von  $\sin \theta_w$  und der Higgsmasse begründet.

Zusammenfassend seien hier die Ergebnisse der Standardmodellbeiträge aufgelistet [JN09]:

Klasse	Beitrag $\times 10^{11}$
QED	$116\,584\,718.1 \pm 0.2$
hadron. Vakuumpol. (l.o.)	$6\,903.0 \pm 52.6$
hadron. Vakuumpol. (h.o.)	$-100.3 \pm 1.1$
hadron. $\gamma\gamma$ -Streuung	$116.0 \pm 39.0$
Elektroschwache Beiträge	$153.2 \pm 1.8$
Gesamt Standardmodell	$116\,591\,790.0 \pm 64.6$
Experiment (3.7)	$116\,592\,080 \pm 63$
Abweichung	$290 \pm 90.3$

Die Abweichung zwischen Standardmodell-Vorhersage und dem Ergebnis des Brookhaven-Experimentes (3.7) entspricht einer Diskrepanz von  $3,2\sigma$ . Andere Auswertungen haben eine Diskrepanz von  $3,4\sigma$  [HMNT07] oder  $3,6\sigma$  [DR09] ergeben. Insgesamt lässt sich sagen, dass die Größe der Abweichung eine besondere und bislang beispiellose Herausforderung für das Standardmodell bedeutet. Es stellt sich also die Frage, ob und wie diese Abweichung durch Physik jenseits des Standardmodells erklärt werden kann.

### 3.3. Supersymmetrische Beiträge

Bei exakter Supersymmetrie verschwindet jedes anomale magnetische Moment, da sich die Beiträge der Standardmodellteilchen und die ihrer Superpartner genau wegheben [FR74]. In einer sanft gebrochenen Supersymmetrie, bei der die Superpartner Massen der Größenordnung  $M_{\text{SUSY}} > M_W$  besitzen, ist dies nicht der Fall. Allerdings werden hier die supersymmetrischen Beiträge um den Faktor  $m_\mu^2/M_{\text{SUSY}}^2$  bzw. im Vergleich mit den elektroschwachen Standardmodellbeiträgen um  $M_W^2/M_{\text{SUSY}}^2$  unterdrückt.

Dieses grundsätzliche Verhalten von  $a_\mu^{\text{SUSY}}$  ist folgendermaßen zu verstehen [Stö07]. Der Faktor  $M_{\text{SUSY}}^{-2}$  ist in der asymptotischen Entkopplung supersymmetrischer Beiträge begründet. Der Faktor  $m_\mu^2$  wiederum entspricht  $F_M \propto m_\mu$  mit  $F_M$  aus (3.3). Diese Abhängigkeit lässt sich damit erklären, dass der zu  $F_M$  gehörende Term aus der Kovariantenzerlegung einen Chiralitätswechsel zwischen den ein- und auslaufenden Spinoren  $u, \bar{u}$  vermittelt und damit einen Faktor  $m_\mu$  beiträgt. Denn ein Übergang von links- zu rechtschiralen Teilchen wird



### 3. Das magnetische Dipolmoment des Myon

---

mit  $x = m_{\chi^\pm}^2/m_{\tilde{\nu}}^2$  bzw.  $x = m_{\chi^0}^2/m_{\tilde{\mu}}^2$  und

$$F_1^C = \frac{2}{(1-x)^4} \left( 2 + 3x - 6x^2 + x^3 + 6x \log x \right) \quad (3.13)$$

$$F_2^C = \frac{3}{2(1-x)^3} \left( -3 + 4x - x^2 - 2 \log x \right) \quad (3.14)$$

$$F_1^N = \frac{2}{(1-x)^4} \left( 1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \log x \right) \quad (3.15)$$

$$F_2^N = \frac{3}{(1-x)^3} \left( 1 - x^2 + 2x \log x \right) \quad (3.16)$$

Die Normierung dieser Schleifenfunktionen entspricht dem Fall degenerierter Massen:

$$F_{1,2}^{C,N}(1) = 1 \quad (3.17)$$

Die Kopplungen  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  erhält man, wenn man die MSSM-Lagrangedichte (2.30) mit Hilfe der Mischungsmatrizen (2.43, 2.51, 2.57) in Masseneigenzuständen von Charginos, Neutralinos und Smyonen ausdrückt (vgl. Anhang A):

$$n_L^{im} = \frac{1}{\sqrt{2}}(gZ_{i2} + g'Z_{i1})W_{m1}^* - y_\mu Z_{i3}W_{m2}^* \quad (3.18)$$

$$n_R^{im} = \sqrt{2}g'Z_{i1}W_{m2} + y_\mu Z_{i3}W_{m1} \quad (3.19)$$

$$c_L^k = -gV_{k1} \quad (3.20)$$

$$c_R^k = y_\mu U_{k2} \quad (3.21)$$

Dabei sind  $U, V$  die Mischungsmatrizen der Charginos,  $Z$  die der Neutralinos und  $W \equiv W^{\tilde{\mu}}$  die der Smyonen.

Um die Frage zu beantworten, ob das MSSM die Abweichung zwischen Theorie und Experiment erklären kann, ist es hilfreich, die Größe der Einschleifenbeiträge (3.11, 3.12) abzuschätzen. Dazu soll eine einheitliche Massenskala  $M_{\text{SUSY}}$  für die supersymmetrischen Teilchen angenommen werden. Man erhält [Stö07]:

$$a_\mu^{\text{SUSY,1L}} \approx 13 \cdot 10^{-10} \left( \frac{100 \text{ GeV}}{M_{\text{SUSY}}} \right)^2 \tan \beta \operatorname{sgn}(\mu M_2). \quad (3.22)$$

Mit entsprechenden Werten für  $M_{\text{SUSY}}$  und  $\tan \beta$  sind die supersymmetrischen Beiträge demnach durchaus in der Lage, die Abweichung von  $(29 \pm 9) \cdot 10^{-10}$  zu erklären. Es ist allerdings auch ersichtlich, dass eine präzise Messung von  $a_\mu$  den Parameterbereich des MSSM stark einschränken kann [CM01, Stö07].

## Zweischleifenbeiträge

Auf Zweischleifenniveau kann man zwei Klassen von Diagrammen unterscheiden. In der ersten wird die Myonleptonenzahl vom Myon oder Myonneutrino getragen. Es handelt sich dabei um Einschleifendiagramme des Standardmodells, die um eine Schleife mit Teilchen des MSSM erweitert wurden. Ihr genauer Beitrag ist bereits bekannt [HSW04a, HSW04b]. Dieser kann aufgrund ihrer unterschiedlichen Struktur im Vergleich zu den MSSM-Einschleifendiagrammen auch dann groß ausfallen, wenn letztere stark unterdrückt sind.

In der zweiten Klasse der Zweischleifendiagramme wird die Myonleptonenzahl vom Smyon oder Myonsneutrino getragen. Diese sind in ihrer Struktur den Einschleifendiagrammen (3.10) ähnlich. Hier ist hauptsächlich der führende Logarithmus der QED-Korrekturen zu den Einschleifendiagrammen bekannt:

$$a_\mu^{2L,1l} = -\frac{e}{\pi^2} \log \frac{M_{\text{SUSY}}}{m_\mu} a_\mu^{1L} \quad (3.23)$$

Dieses Ergebnis wird in [DG98] mittels einer effektiven Feldtheorie der Form

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\sqrt{2}G_\mu \sum_i C_i O_i \quad (3.24)$$

ermittelt, wobei unter den Operatoren  $O_i$  der entscheidende Operator des anomalen magnetischen Moment lautet:

$$H_\mu = -\frac{e}{16\pi^2} m_\mu \bar{\mu} \sigma^{\nu\rho} \mu F_{\nu\rho} \quad (3.25)$$

Weitere Beiträge von ausgewählten Diagrammen, die über den führenden Logarithmus hinausgehen, sind ebenfalls ermittelt [FLL<sup>+</sup>06]. Die folgenden Korrekturen zu den Einschleifendiagrammen sind bislang jedoch unbekannt:

- die genaue Form der Logarithmen sowie die nichtlogarithmischen Anteile der QED-Korrekturen,
- weitere elektroschwache Korrekturen mit  $W^\pm$ -,  $Z^0$ - und Higgsbosonen statt Photonen,
- Fermion-Sfermion-Schleifeneinsetzungen, insbesondere mit den durch ihre große Yukawakopplung verstärkten Quarks und Squarks der dritten Generation.

Die Unwissenheit über die genauen Ergebnisse dieser Diagramme bestimmt die theoretische Ungenauigkeit der gesamten supersymmetrischen Beiträge. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Ungenauigkeit zu verringern. Dazu soll die erste der drei oben aufgelisteten noch unbekannteren Klassen von Zweischleifenbeiträgen betrachtet werden. Dieser Aufgabe widmen sich die folgenden Kapitel.

### 3. Das magnetische Dipolmoment des Myon

---

# 4. Berechnung der Zweischleifenbeiträge

In diesem Kapitel sollen QED-Korrekturen zu den MSSM-Einschleifendiagrammen (3.10) untersucht werden. Dazu wird zunächst ein dem MSSM gegenüber vereinfachtes Modell definiert, in dem die Rechnungen ausgeführt werden.

## 4.1. Vereinfachtes Modell

Grundlage des Modells, in dem die folgenden Untersuchungen durchgeführt werden sollen, ist die QED, genauer gesagt die Ein-Flavour-QED mit dem Myon als Fermion. Sie wird um zwei weitere Fermionen, Chargino und Neutralino, sowie zwei Skarteilchen, Smyon und Sneutrino, erweitert. Chargino und Smyon besitzen elektrische Ladung und koppeln an das Photon. Darüber hinaus existieren noch zu bestimmende Kopplungen  $c_{L,R}$  zwischen Myon, Chargino und Sneutrino sowie  $n_{L,R}$  zwischen Myon, Neutralino und Smyon.

Die Lagrangedichte dieses Modells lautet dann

$$\mathcal{L}_{\text{Modell}} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (4.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mat}} = & \bar{\chi}^\mp (i\not{D} - m_{\chi^\pm}) \chi^\pm + |D^\mu \tilde{\mu}|^2 - m_{\tilde{\mu}} |\tilde{\mu}|^2 \\ & + \frac{1}{2} \bar{\chi}^0 (i\not{D} - m_{\chi^0}) \chi^0 + |D^\mu \tilde{\nu}|^2 - m_{\tilde{\nu}} |\tilde{\nu}|^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \bar{\mu} (n_L P_R - n_R^* P_L) \chi^0 \tilde{\mu} + \bar{\mu} (c_L P_R + c_R^* P_L) \chi^- \tilde{\nu} + \text{h.c.} \quad (4.3)$$

Hierbei sind  $D^\mu$  die kovariante Ableitung der QED und  $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$  die Chiralitätsprojektoren. Die Kopplungen  $n_{L,R}$  und  $c_{L,R}$  sind so gewählt, dass sie beim Übergang zum MSSM den Definitionen (3.18 - 3.21) aus [MW01] entsprechen (siehe auch Anhang A).

Im Gegensatz zum MSSM besitzt das so definierte Modell eine überschaubare Anzahl von Parametern. Zu den Parametern der QED,  $e$  und  $m_\mu$ , sind lediglich die zunächst unbestimmten

Kopplungen  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  sowie die Massen  $m_{\chi^\pm}$ ,  $m_{\chi^0}$ ,  $m_{\tilde{\nu}}$  und  $m_{\tilde{\mu}}$  hinzugekommen.

### Bezug zum MSSM

Das hier vorgestellte Modell stellt keine Untermenge des MSSM dar, jedoch lassen sich Ergebnisse von Schleifenrechnungen im hier vorgestellten Modell mit denen des MSSM identifizieren. Das MSSM enthält zwar vier Neutralinos, zwei Charginos und zwei Smyonen. Allerdings kann in einem Zweischleifendiagramm mit einem inneren Photon immer nur ein Teilchen jeder Sorte auftreten. Diagramme, in denen beispielsweise  $\chi_1^\pm$  und  $\chi_2^\pm$  vorkommen, gibt es nicht. So reicht prinzipiell eine einfache Summe über die Anzahl der Neutralinos ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), Charginos ( $k = 1, 2$ ) und der Smyonen ( $m = 1, 2$ ) aus, um das MSSM-Ergebnis zu beschreiben:

$$a_\mu^{\text{MSSM}} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k,m=1}^2 a_\mu^{\text{Modell}}(c_{L,R}^k, n_{L,R}^{im}, m_{\chi_k^\pm}, m_{\chi_i^0}, m_{\tilde{\nu}}, m_{\tilde{\mu}_m}) \quad (4.4)$$

Dabei sind für die zunächst beliebigen Kopplungen die MSSM-Pendants (3.18 - 3.21) bestehend aus elektroschwachen Eichkopplungen und Yukawakopplung einzusetzen.

Man darf dabei allerdings nicht außer Acht lassen, dass der von diesem Modell beschriebene Sektor des MSSM in sich nicht supersymmetrisch ist, denn es fehlen die elektroschwachen Bosonen und die Higgsbosonen. Die Ergebnisse erfahren daher noch Korrekturen aus diesen Sektoren. Zudem schreibt das MSSM Beziehungen zwischen den Massen und Kopplungen der einzelnen Superpartner vor. Dies führt dazu, dass die Renormierung nicht so trivial ist, wie sie in diesem vereinfachten Modell scheinen mag, und ebenfalls Korrekturen erfordert. Diese Punkte werden genauer bei der Diskussion der Ergebnisse im nächsten Kapitel erläutert.

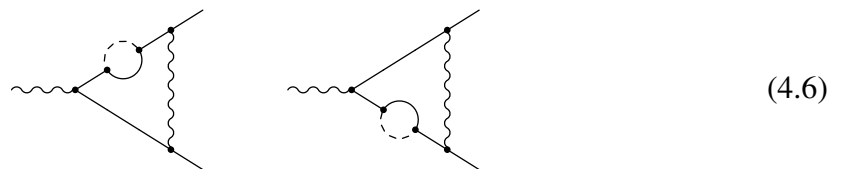
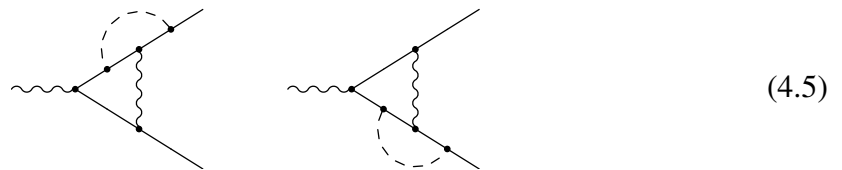
## 4.2. Zweischleifendiagramme

Es werden nun die möglichen Zweischleifendiagramme, die zum Dipolmoment des Myons beitragen und eine QED-Korrektur zu den MSSM-Einschleifendiagrammen darstellen, betrachtet. Die Menge dieser Diagramme zerfällt in zwei disjunkte Klassen: Diagramme mit Chargino-Sneutrino-Schleife ( $\propto c^2 e^2$ ) sowie Diagramme mit Neutralino-Smyon-Schleife ( $\propto n^2 e^2$ ).

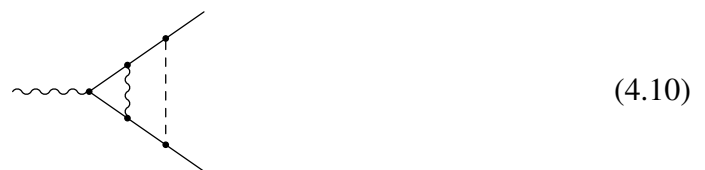
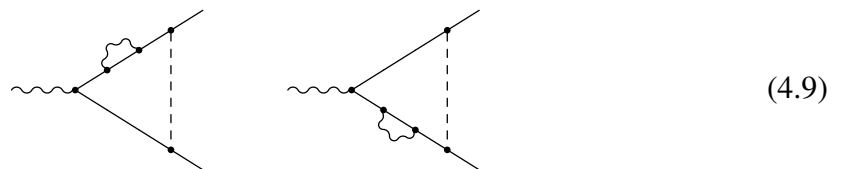
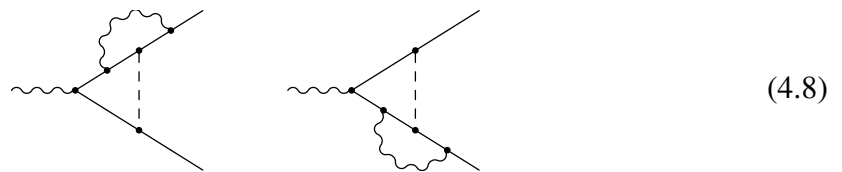
### Diagramme mit Chargino

Innerhalb der Menge der Diagramme mit Chargino-Sneutrino-Schleife lassen sich drei Gruppen identifizieren:

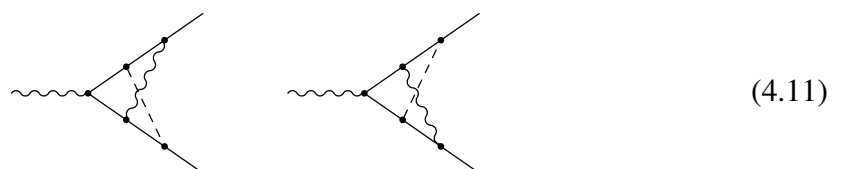
(a) Diagramme, die aus dem Schwinger-Diagramm und einer inneren Chargino-Schleife oder -Vertexkorrektur bestehen:



(b) Diagramme, die aus dem Chargino-Einschleifendiagramm und einer inneren QED-Schleife oder -Vertexkorrektur bestehen:



(c) Nichtplanare Diagramme, die aus überkreuzten QED- und Chargino-Schleifen bestehen:



Diese Gruppen manifestieren sich vor allem bei der Renormierung (s.u.). Die Counterterm-Diagramme der ersten Gruppe sind dort nämlich QED-Einschleifendiagramme mit

#### 4. Berechnung der Zweischleifenbeiträge

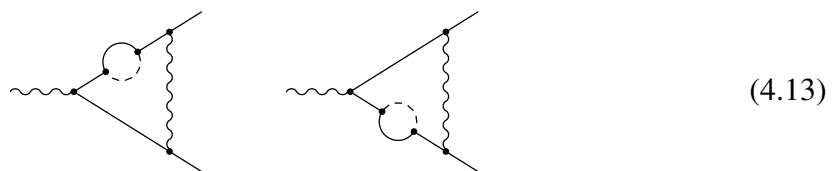
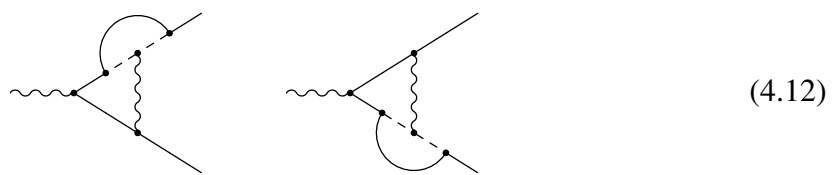
---

Counterterm-Vertizes oder -propagatoren. Bei der zweiten Gruppe sind es dementsprechend Chargino-Einschleifendiagramme. Die dritte Gruppe hat keine Counterterme und muss daher ohne Divergenz sein. Dies bestätigt sich auch bei der expliziten Berechnung.

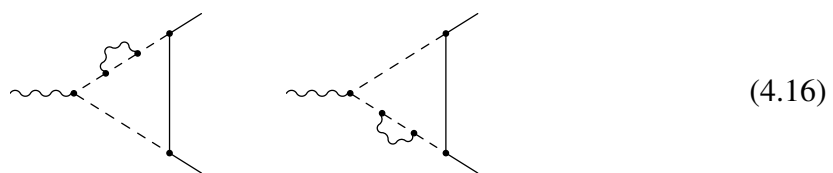
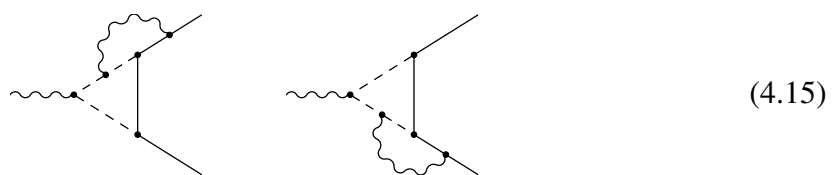
### Diagramme mit Neutralino

Ähnlich wie bei den vorangegangenen Diagrammen lassen sich auch unter den Diagrammen mit Chargino-Neutralino-Schleife drei Gruppen identifizieren:

(a) Schwinger-Diagramme mit einer inneren Neutralino-Schleife oder -Vertexkorrektur:

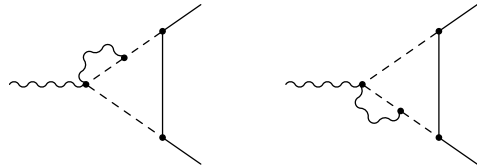


(b) Neutralino-Einschleifendiagramme mit einer inneren QED-Schleife oder -Vertexkorrektur:

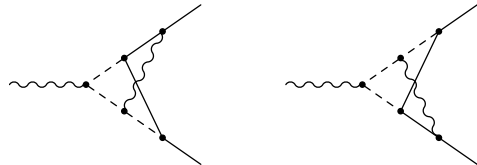


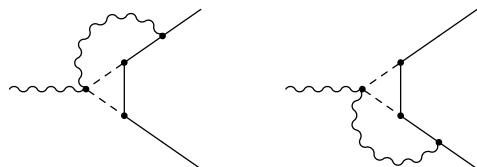
Im Vergleich mit den Chargino-Diagrammen des vorherigen Abschnitts enthält diese Gruppe noch zusätzliche Diagramme, nämlich solche mit Zwei-Photon-Kopplung am

Smyon:


(4.18)

(c) Überkreuzte QED- und Neutralino-Schleifen, wiederum auch in der Variante mit Zwei-Photon-Kopplung:


(4.19)


(4.20)

Ähnlich wie bei den Diagrammen mit Chargino-Sneutrino-Schleife sind diese Diagramme konvergent.

### 4.3. Auswertung der Diagramme

Die Berechnung der oben aufgeführten Zweischleifenbeiträge wurde algebraisch mit *Mathematica* durchgeführt. Ausgangspunkt dabei waren die Amplituden der einzelnen Diagramme, die mit dem *FeynArts*-Paket [KBD90, Hah01] generiert wurden. Dazu wurde das oben beschriebene vereinfachte Modell in *FeynArts* definiert. Eine detaillierte Beschreibung der Implementation findet sich in Anhang B.

#### Extraktion von $a_\mu$

Aus den Diagrammampplituden kann der Formfaktor des anomalen magnetischen Moments  $a_\mu$  bestimmt werden. Er wird bei automatisierten algebraische Rechnungen am effizientesten mit einem Projektionsoperator extrahiert. Die Darstellung unten folgt [CK96], welche ihrerseits eine Erweiterung des Projektors aus [RLR90] ist.

Man wählt den Ansatz

$$P^\mu = (\not{p} + m) \left( c_1 \gamma^\mu + c_2 \frac{(p + p')^\mu}{2m} + c_3 \frac{(p - p')^\mu}{m} \right) (\not{p}' + m), \quad (4.21)$$

sodass der Projektor angewendet auf die Vertexfunktion  $\Gamma_\mu$  das anomale magnetische Moment

ergibt:

$$\text{Tr}(P^\mu \Gamma_\mu) = a_f \quad (4.22)$$

Die genaue Form der  $c_i$  lässt sich durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen, wenn man die Kovariantenzerlegung von  $\Gamma_\mu$  (3.3) einsetzt.

Allerdings ist dann das Ergebnis noch von  $q^2 = (p - p')^2$  abhängig. Um  $a_f$  zu erhalten, muss der Formfaktor bei  $q^2 = 0$  betrachtet werden. Auch das lässt sich mit dem Projektor extrahieren. Man entwickelt dazu die Vertexfunktion  $\Gamma^\mu$  bis zur ersten Ordnung in  $q$ . Wenn man dann  $\text{Tr}(P^\mu \Gamma_\mu)$  über alle Raumrichtungen von  $q^\nu$  mittelt, kann der Grenzübergang  $q^2 \rightarrow 0$  durchgeführt werden. Man erhält schließlich:

$$a_f = \frac{1}{2(D-1)(D-2)m^2} \text{Tr} \left( \frac{D-2}{2} \left[ m^2 \gamma_\mu - D \not{p} p_\mu - (D-1) m p_\mu \right] V^\mu + \frac{m}{4} (\not{p} + m) [\gamma_\nu, \gamma_\mu] (\not{p} + m) T^{\mu\nu} \right) \quad (4.23)$$

Dabei ist  $D$  die Raumzeitdimension in der Dimensionalen Regularisierung (s.u.).  $V^\mu$  und  $T^{\mu\nu}$  sind nullte und erste Terme aus der Entwicklung der Vertexfunktion:

$$V^\mu = \Gamma^\mu \Big|_{q^2=0} \quad \text{und} \quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial q^\nu} \Gamma^\mu \Big|_{q^2=0}. \quad (4.24)$$

Zur Bestimmung von  $a_f$  sind lediglich  $V^\mu$  und  $T^{\mu\nu}$  auszuwerten. Beide haben die Struktur einer Selbstenergie, da der äußere Photonimpuls  $q$  verschwindet und das ein- bzw. auslaufende Fermion on-shell betrachtet wird. Demnach können Methoden zur Auswertung von Selbstenergiendiagrammen auch bei der Berechnung des anomalen magnetischen Moments Anwendung finden.

## Berechnung der Zweischleifenintegrale

Die Amplituden der Zweischleifendiagramme bestehen aus Integralen über die beiden unabhängigen Schleifenimpulse. Diese können algebraisch auf standardisierte skalare Ein- und Zweischleifenintegrale zurückgeführt werden. Dazu wurde das Programmpaket *TwoCalc* [WSB94] verwendet.

In den Schleifenintegralen treten unterschiedliche Massenhierarchien auf, denn die Myonmasse ist wesentlich kleiner als die Massen der supersymmetrischen Teilchen. Zur Evaluation der Integrale wird daher eine asymptotische Entwicklung in großen Massen (*Large Mass Expansion*) [Smi95] verwendet. Dazu werden Subgraphen  $\gamma$  des Feynmandiagramms  $\Gamma$  betrachtet, die

- alle schweren Propagatoren enthalten und
- Einteilchen-irreduzibel bezüglich den leichten Propagatoren sind.

Dann lässt sich das Schleifenintegral  $F_\Gamma$  folgendermaßen zerlegen:

$$F_\Gamma(q, M, m) \stackrel{M \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{\gamma} F_{\Gamma/\gamma}(q, m) \circ \mathcal{T}_{q^\gamma, m^\gamma} F_\gamma(q^\gamma, M, m^\gamma) \quad (4.25)$$

Dabei beschreibt  $\Gamma/\gamma$  das Diagramm, das aus  $\Gamma$  hervorgeht, wenn man den Subgraphen  $\gamma$  auf einen Punkt zusammenzieht.  $\mathcal{T}_{q^\gamma, m^\gamma}$  ist die Taylorentwicklung bezüglich der kleinen Massen  $m^\gamma$  und äußeren Impulse  $q^\gamma$  des Subgraphen  $\gamma$ . Diese Entwicklung wird im vorliegenden Fall bis  $\mathcal{O}(m_\mu^2/M_{\text{SUSY}}^2)$  durchgeführt. Per Konstruktion treten nun die schweren Massen nur in  $F_\gamma$  auf und sind damit von den leichten Massen und Impulsen in  $F_{\Gamma/\gamma}$  separiert. Ein Ausdruck der Form  $F_{\Gamma/\gamma} \circ \mathcal{P}$  bezeichnet das Schleifenintegral, das aus  $F_{\Gamma/\gamma}$  durch Ersetzen des Subgraphen  $\gamma$  mit  $\mathcal{P}$  hervorgeht.

Wie oben erwähnt sorgt der Projektor (4.23) dafür, dass betrachteten Schleifenintegrale die Struktur einer Selbstenergie haben, also Zweipunktintegrale sind. Auf Zweischleifenniveau lassen sich dann folgende Fälle unterscheiden [HSW04b]:

- *leichtes 0-Schleifendiagramm*  $\circ$  *schweres 2-Schleifendiagramm*:

Das 0-Schleifendiagramm führt zu einer rationalen Funktion in  $m_\mu$ , das 2-Schleifendiagramm kann auf das bekannte Masterintegral  $T_{134}$  (A.26) zurückgeführt werden.

- *leichtes 1-Schleifendiagramm*  $\circ$  *schweres 1-Schleifendiagramm*:

In diesem Fall können beide Integrale einfach auf die Standard-Einschleifenintegrale  $A_0$  und  $B_0$  zurückgeführt werden.

- *leichtes 2-Schleifendiagramm*  $\circ$  *schweres 0-Schleifendiagramm*:

Dieser Fall tritt bei den hier betrachteten Diagrammen nicht auf, da immer eine Chargino-Sneutrino- oder Neutralino-Smyon-Schleife vorhanden ist. Im MSSM tritt dieser Fall ohnehin nicht bei Diagrammen mit supersymmetrischen Teilchen auf, da die R-Parität fordert, dass die Superpartner immer in einer geschlossenen Schleife auftreten.

## 4.4. Renormierung

Die in den Diagrammamplituden auftretenden Integrale führen in der Regel zu Divergenzen. Ausnahmen bilden im vorliegenden Fall lediglich die Diagramme (4.11) und (4.19). Zur Behandlung der Divergenzen müssen diese regularisiert werden. Dies kann zum Beispiel

#### 4. Berechnung der Zweischleifenbeiträge

---

durch die Einführung einer Cut-Off-Grenze beim Integrieren geschehen. Diese Methode ist allerdings nicht eichkovariant, weswegen üblicherweise die *Dimensionale Regularisierung* [BG72, Ash72, tHV72] verwendet wird.

Bei der Dimensionalen Regularisierung werden die Impulsraumintegrale in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen ausgeführt:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \quad (4.26)$$

Sämtliche Lorentzvektoren sind dann ebenfalls  $D$ -dimensional<sup>1</sup>. Die Ergebnisse sind dann zunächst abhängig von  $D$  bzw.  $\epsilon$  und der Massenskala  $\mu$ . Die Terme proportional zu  $\epsilon^{-1}$  stellen die divergenten, die Terme ohne  $\epsilon$ -Abhängigkeit die endlichen Anteile dar. Die Größe  $\mu$  ist das Analogon zum Cut-Off-Parameter, da sie ebenfalls die Dimension einer Masse besitzt. Sie tritt in den Ergebnissen vorwiegend in Logarithmen der Form  $\log(\frac{m^2}{\mu^2})$  auf. Solche Logarithmen werden im Folgenden abkürzend als  $L(m^2)$  geschrieben (vgl. A.30). Um  $\mu$  vom gleichnamigen MSSM-Parameter zu unterscheiden, wird es im weiteren Verlauf mit  $\mu^{\text{DREG}}$  bezeichnet.

### Renormierungstransformation

Das Auftreten von Divergenzen oder einem unphysikalischen Regulator  $\epsilon$  in den Schleifenergebnissen hat zur Folge, dass die Parameter in der „nackten“ Lagrangedichte (4.1) keine physikalische Bedeutung besitzen. Um dieses Problem zu beheben, werden die Parameter mit einer Renormierungstransformation renormiert. Dabei geht ein „nackter“ Parameter über in einen physikalischen Parameter und einen Counterterm, der die unphysikalische Regulatorabhängigkeit bzw. die Divergenz absorbiert:

$$g \rightarrow Zg = g + \delta g \quad (4.27)$$

Für das vereinfachte Modell wurde folgende Renormierungstransformation durchgeführt:

$$\mu_{L,R} \rightarrow \sqrt{Z_{L,R}} \mu_{L,R} = (1 + \frac{1}{2} \delta Z_{L,R}) \mu_{L,R} \quad (4.28)$$

$$A^\mu \rightarrow \sqrt{Z_A} A^\mu = (1 + \frac{1}{2} \delta Z_A) A^\mu \quad (4.29)$$

---

<sup>1</sup>In  $D$  Dimensionen kann die in den Chiralitätsprojektoren benötigte  $\gamma^5$ -Matrix nicht explizit definiert werden. Für die Auswertung der Diagrammamplituden reicht es allerdings aus, sich auf die antikommutierende Eigenschaft  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  zu beschränken. Es wird die in [HSW04b] beschriebene Methode angewendet.

$$m_\mu \rightarrow m_\mu + \delta m_\mu \quad (4.30)$$

$$m_{\chi^{\pm,0}} \rightarrow m_{\chi^{\pm,0}} + \delta m_{\chi^{\pm,0}} \quad (4.31)$$

$$m_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^2 \rightarrow m_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^2 + \delta m_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^2 \quad (4.32)$$

$$e \rightarrow Z_e e = e(1 + \delta Z_e) \quad (4.33)$$

$$c_{L,R} \rightarrow c_{L,R} + \delta c_{L,R} \quad (4.34)$$

$$n_{L,R} \rightarrow n_{L,R} + \delta n_{L,R} \quad (4.35)$$

Es ist nicht nötig, die Chargino-, Neutralino- und Sleptonenfelder zu renormieren, da diese in den betrachteten Diagrammen innere Teilchen sind und sich damit die entsprechenden Counterterme genau wegheben würden. Darüber hinaus gilt die Ward-Identität der QED auch im vorliegenden Modell:

$$p_\mu \mathcal{M}^\mu(p) = 0 \quad (4.36)$$

Dabei ist  $\mathcal{M}^\mu$  die Amplitude eines QED-Prozesses mit einem externen Photon, das den Impuls  $p$  besitzt. Daraus folgt für die Renormierung der elektrischen Ladung und des Photonfeldes:

$$\delta Z_e = -\frac{1}{2} \delta Z_A \quad (4.37)$$

Auch diese Renormierungskonstanten heben sich also an allen QED-Vertizes gegenseitig weg. Man erhält schließlich die Lagrangedichte in Abhängigkeit der physikalischen Felder und Parameter:

$$\mathcal{L}_{\text{bare}} = \mathcal{L}_{\text{Modell}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}} \quad (4.38)$$

Dabei hat  $\mathcal{L}_{\text{bare}}$  die Form von  $\mathcal{L}_{\text{Modell}}$  in (4.1). Neu ist die Counterterm-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$ , die Terme linear in den Renormierungskonstanten enthält:

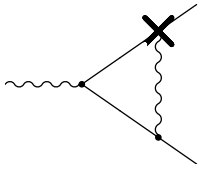
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{c.t.}} = & \bar{\mu} i \not{\partial} \left( \frac{1}{2} \text{Re}(\delta Z_R) P_R + \frac{1}{2} \text{Re}(\delta Z_L) P_L \right) \mu \\ & - \bar{\mu} \left( \delta m_\mu + \frac{1}{2} m (\delta Z_R + \delta Z_L^*) P_L + \frac{1}{2} m (\delta Z_L + \delta Z_R^*) P_R \right) \mu \\ & + \bar{\mu} \left( (\delta c_L + \frac{1}{2} \delta Z_L^* c_L) P_R + (\delta c_R^* + \frac{1}{2} \delta Z_R^* c_R^*) P_L \right) \chi^- \tilde{\nu} + \text{h.c.} \\ & - \delta m_{\chi^\pm} \overline{\chi^\pm} \chi^\pm - \delta m_{\tilde{\nu}}^2 |\tilde{\nu}|^2 \\ & + \text{analog für } \chi^0, \tilde{\mu}, n_{L,R} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aus  $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$  ergeben sich weitere Feynmanregeln, mit denen Counterterm-Diagramme auf Zweischleifenordnung gebildet werden können. Dies sind Einschleifendiagramme mit Counterterm-Einsetzungen. Wie bei den Zweischleifendiagrammen sind hier nur die Diagramme  $\propto c^2 e^2, n^2 e^2$  von Interesse. Damit treten weder Counterterme mit  $\delta Z_A$  noch mit  $\delta m_{\chi^0}, \delta m_{\tilde{\nu}}$  auf.

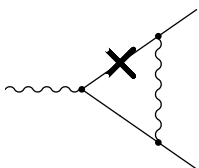
### Counterterm-Diagramme

Ähnlich wie die Zweischleifendiagramme zerfallen die Counterterm-Diagramme in mehrere Gruppen:

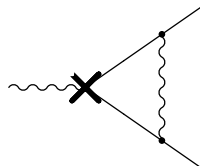
(a) Diagramme bestehend aus dem Schwinger-Diagramm mit eingesetzten Counterterm-Vertizes und -Propagatoren:



$$\longrightarrow \delta Z_{L,R} \quad (4.40)$$

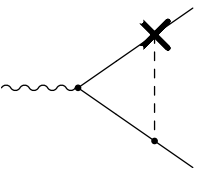


$$\longrightarrow \delta m_\mu, \delta Z_{L,R} \quad (4.41)$$

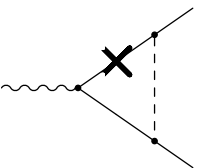


$$\longrightarrow \delta Z_{L,R} \quad (4.42)$$

(b) Diagramme basierend auf dem Chargino-Einschleifendiagramm:



$$\longrightarrow \delta c_{L,R}, \delta Z_{L,R} \quad (4.43)$$

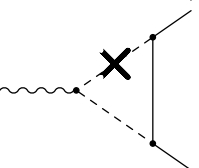


$$\longrightarrow \delta m_{\chi^\pm} \quad (4.44)$$

(c) Diagramme basierend auf dem Neutralino-Einschleifendiagramm:



$$\longrightarrow \delta n_{L,R}, \delta Z_{L,R} \quad (4.45)$$



$$\longrightarrow \delta m_{\tilde{\rho}}^2 \quad (4.46)$$

Das Gesamtergebnis der betrachteten Zweischleifenkorrekturen ergibt sich aus der Summe der Zweischleifen- und Counterterm-Diagramme. Die Renormierungskonstanten sind dabei so zu wählen, dass die Divergenzen wegfallen. Die genaue Definition der Renormierungskonstanten und damit die Wahl des *Renormierungsschemas* bestimmt die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Renormierungsmassenskala  $\mu$ .

Die Wahl eines geeigneten Renormierungsschemas und die Diskussion des Ergebnisses der Zweischleifenkorrekturen ist Thema des nächsten Kapitels.

#### 4. Berechnung der Zweischleifenbeiträge

---

# 5. Ergebnisse

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sollen die Ergebnisse der Zweischleifenbeiträge angegeben und diskutiert werden. Deren vollständige Berechnung erfordert jedoch zunächst die Bestimmung der Renormierungskonstanten und den Wegfall der Divergenzen.

## 5.1. Renormierungskonstanten

Im Folgenden wird das gewählte Renormierungsschema diskutiert und Ergebnisse für die Renormierungskonstanten angegeben.

### 5.1.1. Myon

Das Myon ist äußeres Teilchen und daher *on-shell* zu betrachten. Dabei fordert man allgemein, dass die renormierte Selbstenergie  $\hat{\Sigma}$  verschwindet, damit der Propagator seinen Pol beim Massenparameter  $m_f$  hat und  $m_f$  die physikalische Masse beschreibt:

$$\text{Re}\left(\hat{\Sigma}(p = m_f)\right) = 0 \quad (5.1)$$

Eine unrenormierte Fermionselbstenergie lässt sich allgemein in Skalar- und Vektoranteile zerlegen:

$$\Sigma(p) = \not{p}\Sigma_V(p^2) + \Sigma_S(p^2) \quad (5.2)$$

Aus (5.1) ergibt sich damit die konkrete Berechnungsvorschrift für die On-Shell-Renormierungskonstanten:

$$\begin{aligned} \delta Z_f &= -\frac{\partial}{\partial p} \Sigma(p) \Big|_{p=m_f} \\ &= -\Sigma_V(m_f^2) - 2m_f^2 \Sigma'_V(m_f^2) - 2m_f \Sigma'_S(m_f^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \delta m_f &= \Sigma(m_f) \\ &= m_f \Sigma_V(m_f^2) + \Sigma_S(m_f^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Im vorliegenden Modell gibt es drei Diagramme, die zur Selbstenergie des Myon und damit



Insbesondere wird bei  $\delta Z_\mu^{\text{QED}}$  benötigt:

$$B_0'(M^2, 0, M) = -\frac{B_0(M^2, 0, M)}{2M^2} \quad (5.11)$$

Mit dieser Identität lautet der QED-Anteil der Myonfeld-Renormierungskonstanten dann (infrarot- und ultraviolettdivergente Anteile sind separat angegeben):

$$\delta Z_\mu^{\text{QED}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \underbrace{-\frac{1}{\epsilon}}_{\text{UV}} \underbrace{-\frac{2}{\epsilon}}_{\text{IR}} -4 + 3L(m_\mu^2) \right] \quad (5.12)$$

Der QED-Anteil der Myonmassen-Renormierungskonstanten ergibt sich analog:

$$\frac{\delta m_\mu^{\text{QED}}}{m_\mu} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{3}{\epsilon} -4 + 3L(m_\mu^2) \right] \quad (5.13)$$

### Chargino- und Neutralino-Anteile

Die Chargino- und Neutralinoanteile (5.7, 5.8) an der Selbstenergie bestehen aus Einschleifenintegralen, deren äußere Impulse auf der Massenschale der Myonmasse liegen (on-shell). Diese äußeren Impulse sind klein gegenüber den schweren supersymmetrischen Teilchen, die in der Schleife laufen, sodass diese Selbstenergiendiagramme die Bedingung der Subgraphen  $\gamma$  in der Large Mass Expansion (4.25) erfüllen. Dies wird besonders deutlich, wenn die Renormierungskonstanten in die Counterterm-Diagramme, die topologisch Einschleifendiagrammen entsprechen, eingesetzt werden. Analog zu der Massenentwicklung werden daher die Renormierungskonstanten ebenfalls bis zur Ordnung  $m_\mu^2$  entwickelt.

Für alle weiteren Ergebnisse werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\mathcal{A}_C = |c_L|^2 + |c_R|^2 \quad (5.14)$$

$$\mathcal{A}_N = |n_L|^2 + |n_R|^2 \quad (5.15)$$

$$\mathcal{R}_C = \text{Re}[c_L c_R] \quad (5.16)$$

$$\mathcal{R}_N = \text{Re}[n_L n_R] \quad (5.17)$$

Die Chargino- und Neutralinoanteile der Myon-Renormierungskonstanten lassen sich dann



Sowohl Chargino- als auch Smyonmasse werden on-shell renormiert. Im vereinfachten Modell ist dies ohne weiteres möglich, die Situation im MSSM wird weiter unten erörtert. Die Renormierungskonstanten sind dann:

$$\frac{\delta m_{\chi^\pm}}{m_{\chi^\pm}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{3}{\epsilon} - 4 + 3L(m_{\chi^\pm}^2) \right] \quad (5.26)$$

$$\frac{\delta m_{\tilde{\mu}}^2}{m_{\tilde{\mu}}^2} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{3}{\epsilon} - 7 + 3L(m_{\tilde{\mu}}^2) \right] \quad (5.27)$$

### 5.1.3. Kopplungen

Die Kopplungen  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  sollen in einem Schema renormiert werden, dass der *modifizierten minimalen Subtraktion* ( $\overline{\text{MS}}$ ) ähnelt, aber große Logarithmen des vollen MSSM berücksichtigt. Bei der reinen  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung absorbiert der Counterterm nur die Divergenz und steuert keine endlichen Korrekturen bei. Im vorliegenden Fall hieße das, dass die Vertex-Counterterme die Divergenz der Einschleifendiagramme wegheben müssen. Daraus ergeben sich für die UV-divergenten Anteile von  $\delta c_{L,R}$  und  $\delta n_{L,R}$  die Bedingungen

$$\underbrace{\text{Diagram 1}} + \underbrace{\text{Diagram 2}} \stackrel{!}{=} \text{endlich} \quad (5.28)$$

$$i \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{4}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right] c_{L,R} \quad i \frac{1}{2} \left( \delta Z_{\mu}^{\text{QED}} + \delta Z_{\chi^\pm} \right) c_{L,R} + i \delta c_{L,R}^{\text{UV}}$$

$$\underbrace{\text{Diagram 3}} + \underbrace{\text{Diagram 4}} \stackrel{!}{=} \text{endlich.} \quad (5.29)$$

$$i \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right] n_{L,R} \quad i \frac{1}{2} \left( \delta Z_{\tilde{\mu}}^{\text{QED}} + \delta Z_{\tilde{\mu}} \right) n_{L,R} + i \delta n_{L,R}^{\text{UV}}$$

Um daraus  $\delta c_{L,R}^{\text{UV}}$  und  $\delta n_{L,R}^{\text{UV}}$  zu bestimmen, ist die Kenntnis von  $\delta Z_{\chi^\pm}$  und  $\delta Z_{\tilde{\mu}}$  notwendig, auch wenn letztere in der Summe aller Counterterme keine Rolle spielen. Hier müssen sogar nur die UV-divergenten Anteile verglichen werden. Da die Chargino-Selbstenergie (5.24) in ihrer Struktur identisch mit dem QED-Anteil der Myon-Selbstenergie (5.6) ist, kann der UV-divergente Anteil von  $\delta Z_{\chi^\pm}$  aus (5.12) übernommen werden. Beim Smyon ist er mit der

Selbstenergie (5.25) zu berechnen:

$$\delta Z_{\chi^\pm}^{\text{UV}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{-1}{\epsilon} \right] \quad (5.30)$$

$$\delta Z_{\bar{\mu}}^{\text{UV}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} \right] \quad (5.31)$$

Aus (5.28, 5.29) lassen sich dann die UV-divergenten Anteile der Kopplungsrenormierungskonstanten bestimmen:

$$\frac{\delta c_{L,R}^{\text{UV}}}{c_{L,R}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{-3}{\epsilon} \right] \quad (5.32)$$

$$\frac{\delta n_{L,R}^{\text{UV}}}{n_{L,R}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \frac{-3}{2\epsilon} \right] \quad (5.33)$$

### Chirale Symmetrie

Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, entspricht der für das anomale magnetische Moment verantwortliche Formfaktor  $F_M$  einem Chiralitätswechsel. Er ist deswegen proportional zu  $m_\mu$ , denn ein Übergang von links- zu rechtschiralen Teilchen wird im MSSM nur durch Massenterme oder Yukawakopplungen beschrieben. Solche Terme haben allerdings auch zur Folge, dass die chirale Symmetrie gebrochen ist. Das soll heißen, dass das MSSM *nicht* invariant unter einer diskreten Transformation beispielsweise der folgenden Form ist:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L \\ E &\rightarrow -E \end{aligned} \quad (5.34)$$

$L$  bezeichnet hier das linkschirale Myon-Superfelddoublet,  $E$  das rechtschirale Superfeld-singlett. Man kann abkürzend sagen, dass die Myonmasse die Ursache der gebrochenen chiralen Symmetrie ist, denn für  $m_\mu = 0$  verschwänden die Terme mit Chiralitätswechsel und das MSSM wäre unter der obigen Transformation invariant.

Die Kopplungen  $c_R$  und  $n_{L,R}$  vermitteln ebenfalls einen Chiralitätswechsel und brechen im vereinfachten Modell demnach auch die chirale Symmetrie. Im MSSM enthalten sie jedoch unter anderem Higgsinokopplungen, also Yukawakopplungen (vgl. 3.18 - 3.21). Damit bleibt dort die Myonmasse alleinige Ursache der gebrochenen chiralen Symmetrie. Berücksichtigt man aber im vereinfachten Modell bei der Renormierung der Kopplungen nicht, dass  $c_R$  und  $n_{L,R}$  proportional zur Myonmasse sind, wäre die Struktur der Brechung der chiralen Symmetrie anders als im MSSM.

Unter solchen Umständen könnte dann auch der führende Logarithmus (3.23) nicht reproduziert werden. Denn im MSSM hängen  $\delta c_R$  und  $\delta n_{L,R}$  von der Renormierungskonstanten der

Myonmasse  $\delta m_\mu$  ab, die wie aus (5.13) ersichtlich logarithmische Beiträge enthält. Zudem ist der Operator des magnetischen Moments (3.25), mit dem der führende Logarithmus in der effektiven Feldtheorie ermittelt wurde, bereits proportional zur Myonmasse. Er geht also auch davon aus, dass die chirale Symmetrie nur durch  $m_\mu$  gebrochen wird.

Aus diesen Gründen reicht eine Renormierung von  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  nach reinem  $\overline{\text{MS}}$ -Schema nicht aus. Die Renormierungskonstante der Myonmasse muss in  $\delta c_R$  und  $\delta n_{L,R}$  noch einfließen. Für  $\delta c_R$  bedeutet das einfach:

$$\delta c_R = \frac{\delta m_\mu}{m_\mu} c_R + \dots \quad (5.35)$$

In den Ein- und Zweischleifenergebnissen tritt  $c_R$  in der Form  $|c_R|^2 \propto m_\mu^2$  oder  $c_L c_R \propto m_\mu$  auf. Da der  $|c_R|^2$ -Anteil nochmals mit  $m_\mu^2$  multipliziert wird, ist sein gesamter Beitrag von der Ordnung  $m_\mu^4$ . Die asymptotische Massenentwicklung berücksichtigt jedoch nur Beiträge bis zur Ordnung  $m_\mu^2$ , so dass die Renormierung der Myonmasse in  $|c_R|^2$  vernachlässigbar ist. Der  $c_L c_R$ -Anteil hingegen wird mit  $m_\mu$  multipliziert und ist insgesamt von der Ordnung  $m_\mu^2$ . Im Zweischleifenergebnis werden diese Terme daher wie folgt renormiert:

$$\delta(c_L c_R) = \frac{\delta m_\mu}{m_\mu} c_L c_R \quad (5.36)$$

Für die Terme mit  $|n_L|^2$  und  $|n_R|^2$  gilt das gleiche Argument wie für  $|c_R|^2$ , denn sie führen insgesamt auf Beiträge der Ordnung  $m_\mu^3$  oder  $m_\mu^4$ . Es müssen daher nur Beiträge der Form  $n_L n_R$  berücksichtigt werden. Allerdings verhält es sich mit den Kopplungen  $n_{L,R}$  etwas komplizierter. Sie bestehen aus einem Yukawa-Anteil und einem Eichanteil:

$$n_{L,R} = n_{L,R}^Y + n_{L,R}^G \quad (5.37)$$

Wie bei  $c_R$  enthält die Renormierung des Yukawa-Anteils die Renormierungskonstante der Myonmasse:

$$\delta n_{L,R}^Y = \frac{\delta m_\mu}{m_\mu} n_{L,R}^Y + \dots \quad (5.38)$$

Aber auch der Eichanteil ist wegen der Smyon-Mischungsmatrizen von der Myonmasse abhängig, sodass  $n_L^G n_R^G \propto m_\mu$ . Insgesamt wird  $n_L n_R$  dann auf folgende Art und Weise renormiert:

$$\delta(n_L n_R) = \frac{\delta m_\mu}{m_\mu} \left( 2n_L^Y n_R^Y + n_L^Y n_R^G + n_L^G n_R^Y + n_L^G n_R^G \right) = \frac{\delta m_\mu}{m_\mu} n_L n_R + \mathcal{O}(m_\mu^2) \quad (5.39)$$

Dies gilt natürlich nur, solange das gewählte MSSM-Renormierungsschema das beschriebene Verhalten der Smyon-Mischungsmatrizen nicht verändert.

## Renormierungsvorschrift

Insgesamt werden die Kopplungen  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  also nach einer Vorschrift renormiert, die die Divergenzen wehrt und die QED-Logarithmen berücksichtigt. Sie lautet:

$$\delta|c_{L,R}|^2 = (\delta|c_{L,R}|^2)^{\text{UV}} \quad (5.40)$$

$$\delta(c_L c_R) = \delta(c_L c_R)^{\text{UV}} + \frac{\delta m_\mu^{\text{fin}}}{m_\mu} c_L c_R \quad (5.41)$$

$$\delta|n_{L,R}|^2 = (\delta|n_{L,R}|^2)^{\text{UV}} \quad (5.42)$$

$$\delta(n_L n_R) = \delta(n_L n_R)^{\text{UV}} + \frac{\delta m_\mu^{\text{fin}}}{m_\mu} n_L n_R \quad (5.43)$$

Die UV-Anteile ergeben sich aus den zuvor bestimmten Werten für  $\delta c_{L,R}^{\text{UV}}$  und  $\delta n_{L,R}^{\text{UV}}$  (5.32, 5.33). Mit  $\delta m_\mu^{\text{fin}}$  ist der endliche Anteil von  $\delta m_\mu^{\text{QED}}$  (5.13) gemeint, da nur Beiträge  $\propto c^2 e^2$  bzw.  $n^2 e^2$  betrachtet werden.

## 5.2. Untersuchung der Divergenzen

Bevor das Ergebnis der Zweischleifenrechnung untersucht wird, soll zunächst das Aufheben der Divergenzen bestätigt werden. Dies lässt sich sogar auf der Ebene einzelner Diagramme durchführen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass dann die Feldrenormierung von Chargino und Snyon betrachtet werden muss. In der Summe aller Counterterm-Diagramme hebt sie sich allerdings weg.

Weiterhin ist bei der Einsetzung der Renormierungskonstanten in die Counterterme zu beachten, dass die jeweiligen Kopplungen in der richtigen Potenz auftreten. Das betrachtete Gesamtergebnis ist von der Ordnung  $c^2 e^2$  bzw.  $n^2 e^2$ , so dass Countertermbeiträge der Ordnung  $e^4$ ,  $c^4$ ,  $n^4$  ignoriert werden.

Im Folgenden sind Summen von Zweischleifen- und Counterterm-Diagrammen angegeben, die endliche Ergebnisse liefern. Dabei wird von Diagrammpaaren, bei dem ein Diagramm aus dem anderen durch Invertierung der Fermionrichtung hervorgeht, nur eines abgebildet.

### QED-artige Counterterme

Die QED-artigen Counterterme (4.40 - 4.42) heben die Divergenz der Chargino- bzw. Neutralinoschleife weg, wenn die Chargino- oder Neutralinoanteile der Renormierungskonstanten

(5.18 - 5.21) verwendet werden:

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^{\pm}}} = \text{endlich} \quad (5.44)$$

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^{\pm}}, \delta m_{\mu}^{\chi^{\pm}}} = \text{endlich} \quad (5.45)$$

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^0}} = \text{endlich} \quad (5.46)$$

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^0}, \delta m_{\mu}^{\chi^0}} = \text{endlich} \quad (5.47)$$

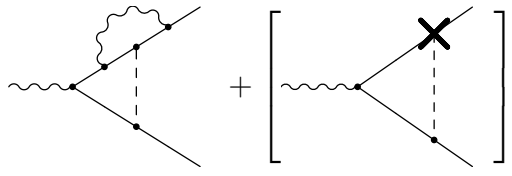
Wie bereits oben erwähnt, enthalten die folgenden Diagramme eine Infrarotdivergenz, die durch die Infrarotdivergenz in  $\delta Z_{\mu}^{\text{QED}}$  (5.12) kompensiert wird:

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^{\pm}}} + \left[ \text{diagram with crossed loop} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\text{QED,IR}}} = \text{endl.} \quad (5.48)$$

$$+ \left[ \text{diagram with crossed vertex} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\chi^0}} + \left[ \text{diagram with crossed loop} \right]_{\delta Z_{\mu}^{\text{QED,IR}}} = \text{endl.} \quad (5.49)$$

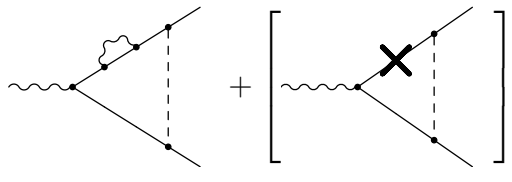
## Chargino-Counterterme

Im Counterterm-Diagramm, das zur Auslöschung der Infrarotdivergenz dient, hebt die UV-Divergenz von  $\delta Z_\mu^{\text{QED}}$  und  $\delta c_{L,R}$  die Divergenz der Photonschleife weg:

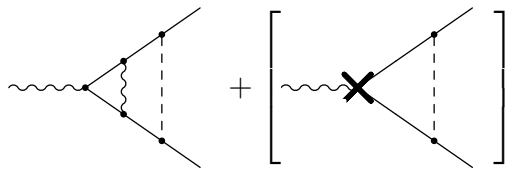


$$= \text{endlich} \quad (5.50)$$

Die weiteren Zweischleifendiagramme benötigen Charginofeldrenormierung (5.30), um die Divergenzen aufzuheben:

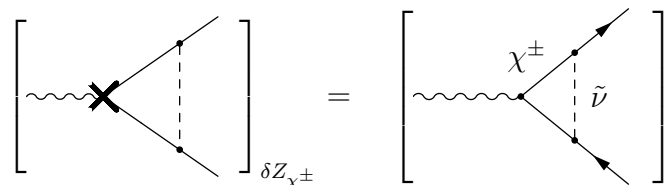


$$= \text{endlich} \quad (5.51)$$



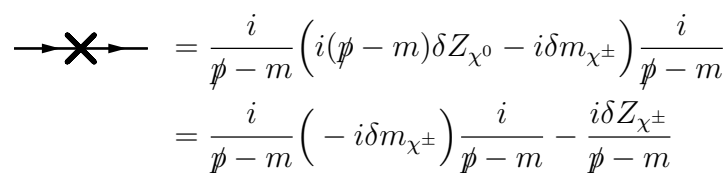
$$= \text{endlich} \quad (5.52)$$

Allerdings wurde Charginofeldrenormierung bei der Berechnung der Counterterme nicht berücksichtigt und muss daher nachträglich hinzugefügt werden. Das letzte Counterterm-Diagramm lässt sich einfach aus dem Chargino-Einschleifendiagramm ableiten:



$$= \text{endlich} \quad (5.53)$$

Das Counterterm-Diagramm mit Charginomassenrenormierung in (5.51) hingegen erfordert eine genauere Betrachtung des Countertermpropagators:



$$= \frac{i}{\not{p} - m} \left( i(\not{p} - m) \delta Z_{\chi^0} - i \delta m_{\chi^\pm} \right) \frac{i}{\not{p} - m} \quad (5.54)$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m} \left( -i \delta m_{\chi^\pm} \right) \frac{i}{\not{p} - m} - \frac{i \delta Z_{\chi^\pm}}{\not{p} - m}$$

Der volle Counterterm lässt sich also folgendermaßen ausdrücken:

$$\left[ \text{Diagram 1} \right]_{\delta Z_{\chi^\pm}, \delta m_{\chi^\pm}} = \left[ \text{Diagram 2} \right]_{\delta m_{\chi^\pm}} - \left[ \text{Diagram 3} \right]_{\delta Z_{\chi^\pm}}$$

An dem negativen Vorzeichen des zweiten Counterterms erkennt man nun auch, dass sich die Chargino-Feldnormierung in (5.51) in der Summe mit (5.53) weghebt.

### Neutralino-Counterterme

Bei den Diagrammen mit Neutralino-Smyon-Schleife ist das Vorgehen analog. Da hier das Smyon das geladene Teilchen ist und deswegen an Photonschleifen koppelt, muss für die individuellen Counterterme die Smyon-Feldnormierung (5.31) berücksichtigt werden. Darüber hinaus kann das Smyon an zwei Photonen gleichzeitig koppeln und produziert so ein zusätzliches divergentes Diagramm:

$$\left[ \text{Diagram 4} \right] + \left[ \text{Diagram 5} \right]_{\delta n_{L,R}, \delta Z_\mu^{\text{QED,UV}}} = \text{endlich} \tag{5.55}$$

$$\left[ \text{Diagram 6} \right] + \left[ \text{Diagram 7} \right]_{\delta Z_{\tilde{\mu}}, \delta m_{\tilde{\mu}}^2} = \text{endlich} \tag{5.56}$$

$$\left[ \text{Diagram 8} \right] + \left[ \text{Diagram 9} \right] + \left[ \text{Diagram 10} \right]_{\delta Z_{\tilde{\mu}}} = \text{endlich} \tag{5.57}$$

## 5.3. Analytische Ergebnisse

An dieser Stelle sollen nun die Gesamtergebnisse der Zweischleifenrechnungen angegeben werden. Es handelt sich um die Summe aller Zweischleifendiagramme und Counterterm-

Diagramme mit den oben aufgeführten Renormierungskonstanten. Es werden die bereits eingeführten Abkürzungen  $\mathcal{A}_{C,N}$  und  $\mathcal{R}_{C,N}$  (5.14 - 5.17) verwendet.

$$a_{2L}^{\chi^\pm} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^2}{2\pi^2} \left[ \left( \frac{m_\mu^2}{12m_{\tilde{\nu}}^2} F_1^C \mathcal{A}_C + \frac{2m_\mu m_{\chi^\pm}}{3m_{\tilde{\nu}}^2} F_2^C \mathcal{R}_C \right) \log \frac{m_\mu^2}{m_{\tilde{\nu}}^2} \right. \\ \left. - \left( \frac{47m_\mu^2}{576m_{\tilde{\nu}}^2} F_3^C \mathcal{A}_C + \frac{61m_\mu m_{\chi^\pm}}{36m_{\tilde{\nu}}^2} F_4^C \mathcal{R}_C \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{m_\mu^2}{16m_{\tilde{\nu}\mu}^2} F_1^C \mathcal{A}_C + \frac{m_\mu m_{\chi^\pm}}{4m_{\tilde{\nu}}^2} F_2^C \mathcal{R}_C \right) L(m_{\tilde{\nu}}^2) \right] \quad (5.58)$$

$$a_{2L}^{\chi^0} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^2}{2\pi^2} \left[ \left( -\frac{m_\mu^2}{12m_{\tilde{\mu}}^2} F_1^N \mathcal{A}_N + \frac{m_\mu m_{\chi^0}}{3m_{\tilde{\mu}}^2} F_2^N \mathcal{R}_N \right) \log \frac{m_\mu^2}{m_{\tilde{\mu}}^2} \right. \\ \left. - \left( -\frac{35m_\mu^2}{576m_{\tilde{\mu}}^2} F_3^N \mathcal{A}_N + \frac{2m_\mu m_{\chi^0}}{9m_{\tilde{\mu}}^2} F_4^N \mathcal{R}_N \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{m_\mu^2}{32m_{\tilde{\mu}}^2} F_1^N \mathcal{A}_N \right) L(m_{\tilde{\mu}}^2) \right] \quad (5.59)$$

$F_{1,2}^{C,N}(x)$  sind die kinematischen Schleifenfunktionen der Einschleifenergebnisse (3.11, 3.12), wobei  $x = m_{\chi^\pm}^2/m_{\tilde{\nu}}^2$  bzw.  $x = m_{\chi^0}^2/m_{\tilde{\mu}}^2$ . Der Vollständigkeit halber sind sie hier nochmals angegeben:

$$F_1^C = \frac{2}{(1-x)^4} (2 + 3x - 6x^2 + x^3 + 6x \log x) \quad (\text{vgl. 3.13})$$

$$F_2^C = \frac{3}{2(1-x)^3} (-3 + 4x - x^2 - 2 \log x) \quad (\text{vgl. 3.14})$$

$$F_1^N = \frac{2}{(1-x)^4} (1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \log x) \quad (\text{vgl. 3.15})$$

$$F_2^N = \frac{3}{(1-x)^3} (1 - x^2 + 2x \log x) \quad (\text{vgl. 3.16})$$

Neu sind die Schleifenfunktionen für die nichtlogarithmischen Anteile der Zweischleifenergebnisse:

$$F_3^C = \frac{4}{141(1-x)^4} (592 - 927x + 486x^2 - 151x^3 \\ + 6(21x^3 - 108x^2 - 93x + 50) \log x \\ - 54x(x^2 - 2x - 2)(\log x)^2 \\ - 108x(x^2 - 2x + 12) \text{Li}_2(1-x)) \quad (5.60)$$

$$F_4^C = \frac{-9}{122(1-x)^3} \left( 8(x^2 - 3x + 2) + (11x^2 - 40x + 5) \log x \right. \\ \left. - 2(x^2 - 2x - 2)(\log x)^2 - 4(x^2 - 2x + 9) \text{Li}_2(1-x) \right) \quad (5.61)$$

$$F_3^N = \frac{4}{105(1-x)^4} \left( 2 - 531x + 432x^2 + 97x^3 + (486x^2 + 78x^3) \log x \right. \\ \left. + 108x(7x + 4) \text{Li}_2(1-x) \right) \quad (5.62)$$

$$F_4^N = \frac{-9}{4(1-x)^3} \left( (x+3)(x \log x + x - 1) + (6x + 2) \text{Li}_2(1-x) \right) \quad (5.63)$$

$\text{Li}_2$  bezeichnet den Dilogarithmus, der über die folgende Reihe definiert ist, aber auch durch ein Integral über den herkömmlichen Logarithmus ausgedrückt werden kann:

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = \int_0^z \frac{-\log(1-t)}{t} dt \quad (5.64)$$

Wie auch  $F_{1,2}^{C,N}$  sind  $F_{3,4}^{C,N}$  für den Fall degenerierter Massen normiert:

$$F_i^{C,N}(1) = 1 \quad (5.65)$$

## Diskussion

Die Ergebnisse (5.58, 5.59) reproduzieren den in [DG98] vorhergesagten führenden Logarithmus genau (mit  $M_{\text{SUSY}} = m_{\tilde{\nu}}$  bzw.  $m_{\tilde{\mu}}$ ):

$$a_{\mu}^{2L} = \frac{e^2}{2\pi^2} \log \frac{m_{\mu}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} a_{\mu}^{1L} + \dots \quad (\text{vgl. 3.23})$$

Insgesamt sind die Zweischleifenergebnisse mit  $e^2/\pi^2 \approx 0,01$  unterdrückt, wobei erwartungsgemäß der führende Logarithmus dominiert. Auffallend ist das relative negative Vorzeichen der Zweischleifenbeiträge gegenüber den Einschleifenbeiträgen, sowohl in den logarithmischen als auch nichtlogarithmischen Anteilen. Mit dem führenden Logarithmus lässt sich das Ausmaß der Reduktion gegenüber den Einschleifenergebnissen abschätzen ( $M_{\text{SUSY}} = 100 \dots 1000$  GeV):

$$\frac{e^2}{\pi^2} \log \frac{m_{\mu}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \approx -(7 \dots 9)\%. \quad (5.66)$$

Es lassen sich einige weitere triviale Überprüfungen der Ergebnisse anstellen. Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, ist zum Beispiel zu erwarten, dass die berechneten Zweischleifenkorrekturen proportional zur Myonmasse sind und für  $m_{\mu} \rightarrow 0$  wie  $m_{\mu}^2/M_{\text{SUSY}}^2$  verschwinden. Lässt man den Logarithmus außer Acht, erfüllen die ermittelten Ergebnisse dies. Denn die  $\mathcal{A}_{C,N}$ -Terme

## 5. Ergebnisse

sind gerade proportional zu  $m_\mu^2/m_\mu^2$  bzw.  $m_\mu^2/m_\nu^2$ , während  $\mathcal{R}_{C,N} \propto m_\mu$ , wie in Abschnitt 5.1.3 beschrieben wurde.

Weiterhin sollten sich die Ergebnisse gutartig bei degenerierten Massen verhalten. Diese Frage stellt sich im Wesentlichen an die Eigenschaften der  $F_i^{N,C}(x)$ . Sie besitzen auf den ersten Blick eine Singularität bei  $x = 1$ , die aber hebbar ist. Die  $F_i^{N,C}(x)$  sind sogar für den Fall  $x = 1$  normiert (vgl. 5.65), sodass dann die Zweischleifenergebnisse direkt aus (5.58, 5.59) ablesbar sind.

Die Ergebnisse enthalten die Funktion  $L(m^2)$  und hängen somit vom unphysikalischen Skalenparameter der Dimensionalen Regularisierung  $\mu^{\text{DREG}}$  ab. Die Ursache dafür ist die Wahl des  $\overline{\text{MS}}$ -artigen Renormierungsschemas für  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$ .

### Im MSSM

Die ermittelten Zweischleifenergebnisse gelten für das vereinfachte Modell. Zwar lassen sie sich nach (4.4) auf die vier Neutralinos, zwei Charginos und zwei Smyonen des MSSM erweitern. Damit ist man dem MSSM allerdings noch nicht vollends gerecht geworden.

Ein Problem ist in der On-Shell-Renormierung begründet. Während die beiden Charginomasen durchaus unabhängig von einander renormiert werden können, lässt sich nur an eine der beiden Smyonmassen eine On-Shell-Bedingung stellen [HR03]. Der Fehler, der durch die On-Shell-Renormierung beider Smyonen begangen wird, wird durch folgenden Differenz-Counterterm quantifiziert:

$$\left[ \text{Diagram} \right]_{\Delta} \quad \text{mit} \quad \Delta = \delta m_{\tilde{\mu}_2}^2{}^{\text{MSSM}} - \delta m_{\tilde{\mu}_2}^2{}^{\text{on-shell}} \quad (5.67)$$

Die Größenordnung dieses Differenzcounterterms lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\left[ \text{Diagram} \right]_{\Delta} \propto \frac{e^2}{16\pi^2} \cdot a_{1L}^{\chi^0} \approx 6 \cdot 10^{-4} \cdot a_{1L}^{\chi^0} \quad (5.68)$$

Ein weiteres Problem stellt die Dimensionale Regularisierung dar. Sie bewirkt, dass alle Lorentzvektoren  $D$  Dimensionen haben, Vektorfelder und  $\gamma$ -Matrizen eingeschlossen. Das hat allerdings zur Folge, dass die Supersymmetrie für  $D \neq 4$  verletzt ist. Denn ein Vektorfeld hat unter Dimensionaler Regularisierung  $D$  Komponenten, der dazugehörige fermionische Superpartner vier Komponenten. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, bietet sich mit der Regularisierung durch *Dimensionaler Reduktion* an [Sie79]. Hierbei werden Impulse

als Elemente eines  $D$ -dimensionalen Raumes betrachtet, während Vektorfelder in einem vierdimensionalen Raum leben<sup>1</sup>.

Wird ein symmetrieerhaltenes Verfahren wie Dimensionale Reduktion nicht verwendet, muss die Supersymmetrie auf andere Weise wiederhergestellt werden. Dies lässt sich durch das Addieren von Supersymmetrie erhaltenden Countertermen bewerkstelligen. Sie bewirken eine endliche Verschiebung des Ergebnisses von Zweischleifenordnung, ohne besondere Verstärkung.

Wie bereits in Abschnitt 4.4 beschrieben, wurde in den hier durchgeführten Rechnungen Dimensionale Regularisierung verwendet. Sie ist das natürliche Regularisierungsschema der QED und damit des vereinfachten Modells. In den on-shell renormierten Beiträgen macht die Wahl zwischen Dimensionaler Regularisierung oder Reduktion ohnehin keinen Unterschied aus. Die zuvor erwähnten Supersymmetrie erhaltenden Counterterme betreffen also nur die Kopplungen  $c_{L,R}$  und  $n_{L,R}$  und damit auch hier nicht betrachtete Sektoren des MSSM. Sie müssen deswegen bei der Einbettung der hier ermittelten Beiträge in eine volle MSSM-Rechnung beachtet werden, nicht aber bei der isolierten Betrachtung der photonischen Zweischleifendiagramme.

## 5.4. Numerische Auswertung

Das prinzipielle numerische Verhalten der Einschleifenergebnisse und der führenden QED-Logarithmen wurde bereits diskutiert (3.22, 5.66). Abbildung 5.1 visualisiert das Verhalten der ermittelten Zweischleifenbeiträge, insbesondere derereren individuelle Anteile, in Abhängigkeit einer einheitlichen Massenskala  $M_{\tilde{\mu}} = \mu = M_2 = \mu^{\text{DREG}}$ . Dabei ist  $A_\mu = 0$  und  $M_1$  ist über den GUT-Limes

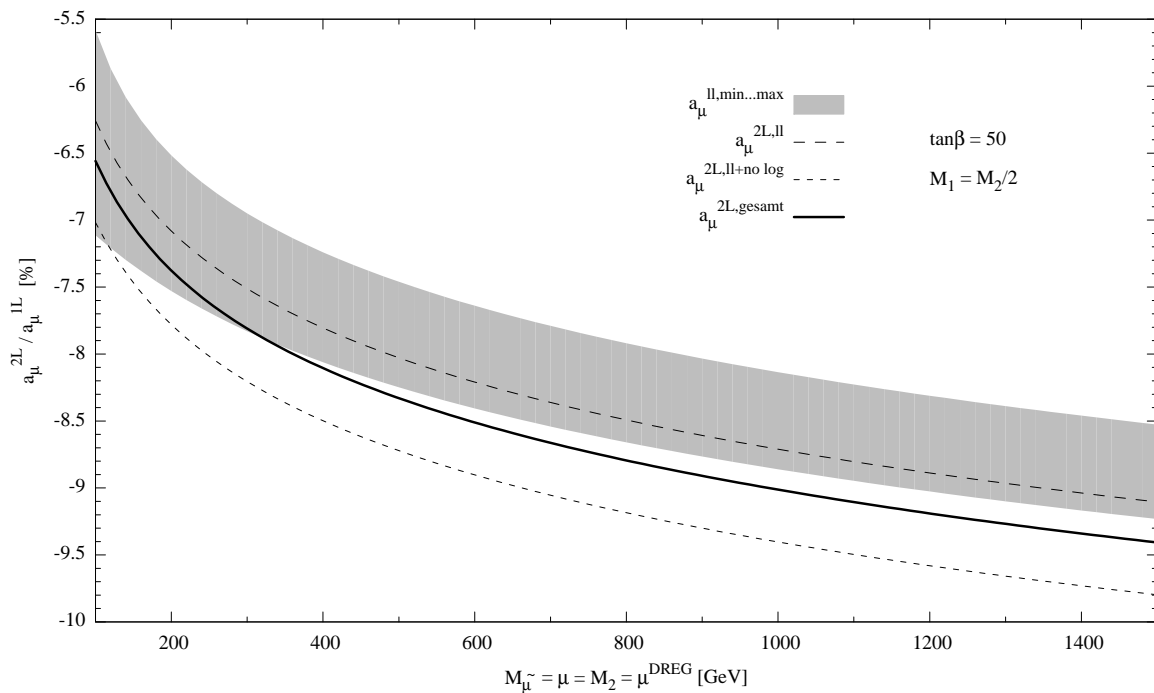
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{5g'^2}{3g^2} \approx \frac{1}{2} \quad (5.69)$$

festgelegt.  $M_{\tilde{\mu}}$  bezeichnet die Snyonmassenparameter  $m_{\tilde{f}_L}$  und  $m_{\tilde{f}_R}$  aus (2.55), die hier ebenfalls gleichgesetzt werden. Die Aufteilung der Zweischleifenbeiträge in den führenden Logarithmus  $a_\mu^{2L,1l}$  und nichtlogarithmische Anteile  $a_\mu^{2L,\text{nolog}}$  lehnt sich an die Darstellung in (5.58, 5.59) an. Zum Vergleich ist der führende Logarithmus dargestellt, wenn er ohne genaue Kenntnis der Zweischleifenergebnisse mit  $M_{\text{SUSY},\text{min}}$  bzw.  $M_{\text{SUSY},\text{max}}$  berechnet wird:

$$a_\mu^{\text{1l},\text{min}} = \frac{e^2}{\pi^2} \log \frac{m_\mu}{M_{\text{SUSY},\text{min}}} a_\mu^{\text{1L}} \quad (5.70)$$

<sup>1</sup>Mathematisch handelt es sich beim vierdimensionalen und  $D$ -dimensionalen Raum eigentlich um unendlich-dimensionale Räume, die nur formal die gewünschten Eigenschaften implementieren.

## 5. Ergebnisse



**Abbildung 5.1.:** Die verschiedenen Anteile der berechneten Zweischleifenbeiträge in Abhängigkeit einer einheitlichen Massenskala.

Dabei ist

$$M_{\text{SUSY}, \min} = \min(m_{\chi_i^0}, m_{\chi_k^\pm}, m_{\tilde{\mu}_m}, m_{\tilde{\nu}}). \quad (5.71)$$

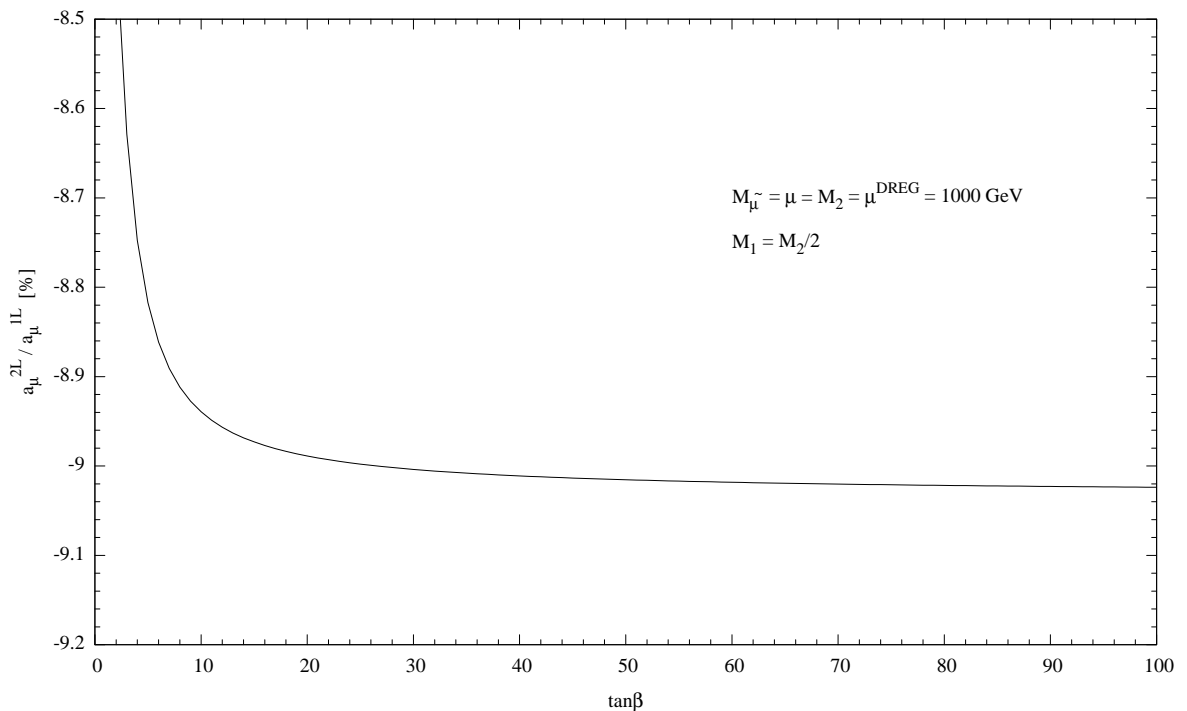
$a_{\mu}^{\text{ll}, \max}$  und  $M_{\text{SUSY}, \max}$  sind analog definiert.

Wie erwartet dominiert der führende Logarithmus ( $a_{\mu}^{2L, \text{ll}}$ ) und gibt die Form der Massenhängigkeit vor. Die nichtlogarithmischen Anteile ( $a_{\mu}^{2L, \text{no log}}$ ) stellen kleine Korrekturen dar. Im weiteren Verlauf sollen die Zweischleifenergebnisse genauer auf ihre Abhängigkeit von den Parametern

$$\tan \beta, \mu, M_2, M_{\tilde{\mu}}$$

untersucht werden. Dabei sind folgende Fragestellungen von Interesse:

- Wie groß sind die nichtlogarithmischen Beiträge im Vergleich zu den führenden Logarithmen?
- Wann und unter welchen Bedingungen stellt der führende Logarithmus eine gute Approximation der betrachteten Zweischleifenbeiträge?



**Abbildung 5.2.:** Für große  $\tan \beta$  zeigen die Zweischleifenbeiträge die gleiche Abhängigkeit wie die Einschleifenbeiträge.

### $\tan \beta$ -Verstärkung

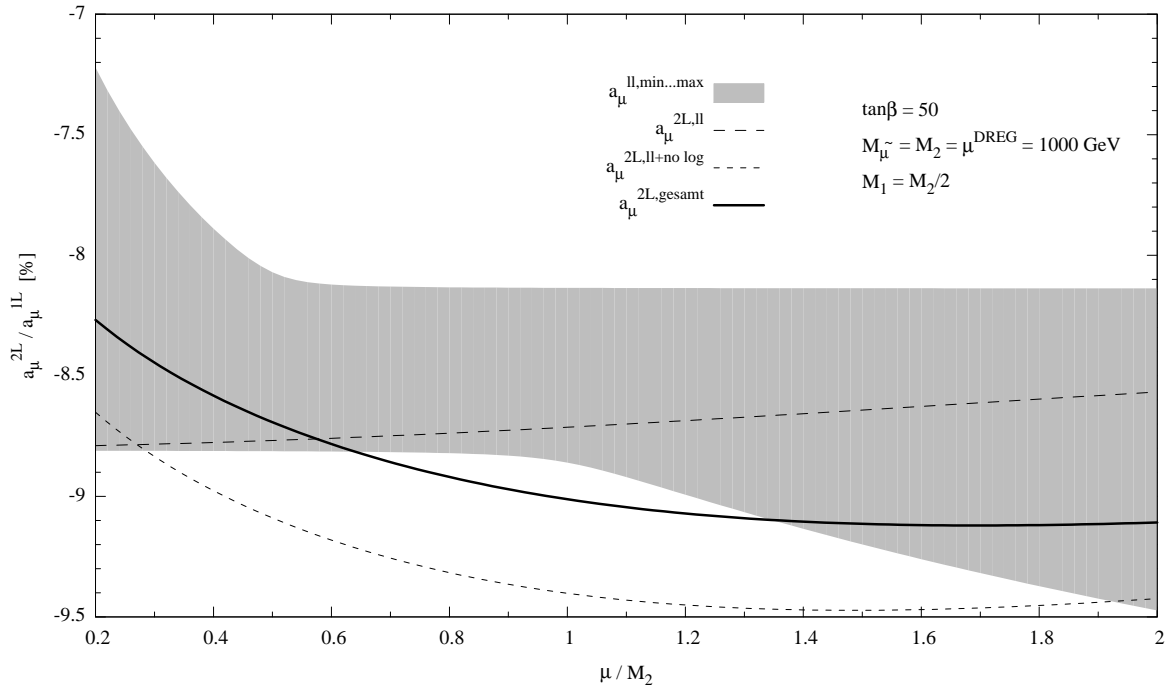
Wie Abbildung 5.2 zeigt, haben die Zweischleifenbeiträge bei großen Werten für  $\tan \beta$  die gleiche Abhängigkeit wie die Einschleifenergebnisse. Das Verhältnis  $a_\mu^{2L}/a_\mu^{1L}$  bleibt ab  $\tan \beta \gtrsim 20$  nahezu identisch. Dies entspricht den Erwartungen, dass die betrachteten Zweischleifenbeiträge keinerlei weitere Verstärkung in  $\tan \beta$  erfahren.

### $\mu$ -Abhängigkeit

Ähnlich wie  $M_2$  ist  $\mu$  aus dem MSSM-Superpotential ein Massenparameter der Neutralinos und Charginos. Das Verhältnis  $\mu/M_2$  beeinflusst insbesondere die Spreizung des Neutralino- und Charginomassenspektrums. Es ist daher von Interesse, wenn die Frage beantwortet werden soll, ob ein naiv abgeschätzter führender Logarithmus eine gute Approximation der betrachteten Zweischleifenbeiträge darstellt.

In Abbildung 5.3 sind die Zweischleifenbeiträge in Abhängigkeit von  $\mu$  für ein festes  $M_2$  dargestellt. Man erkennt, dass  $a_\mu^{\text{ll,max}}$  für  $\mu \lesssim M_2$  die bessere Approximation der Zweischleifenergebnisse liefert<sup>2</sup>. Der Grund dafür ist, dass in diesem Fall Smyon und Sneutrino ähnlich

<sup>2</sup>Man beachte das relative negative Vorzeichen zwischen Zwei- und Einschleifenbeiträgen.  $a_\mu^{\text{ll,max}}$  wird also durch die *untere* Kante des grauen Bereichs beschrieben



**Abbildung 5.3.:** Die Zweischleifenbeiträge können für  $\mu \lesssim M_2$  durch  $a_\mu^{\text{ll,max}}$  approximiert werden.

schwer wie die schweren Neutralinos und Charginos sind, d.h.:

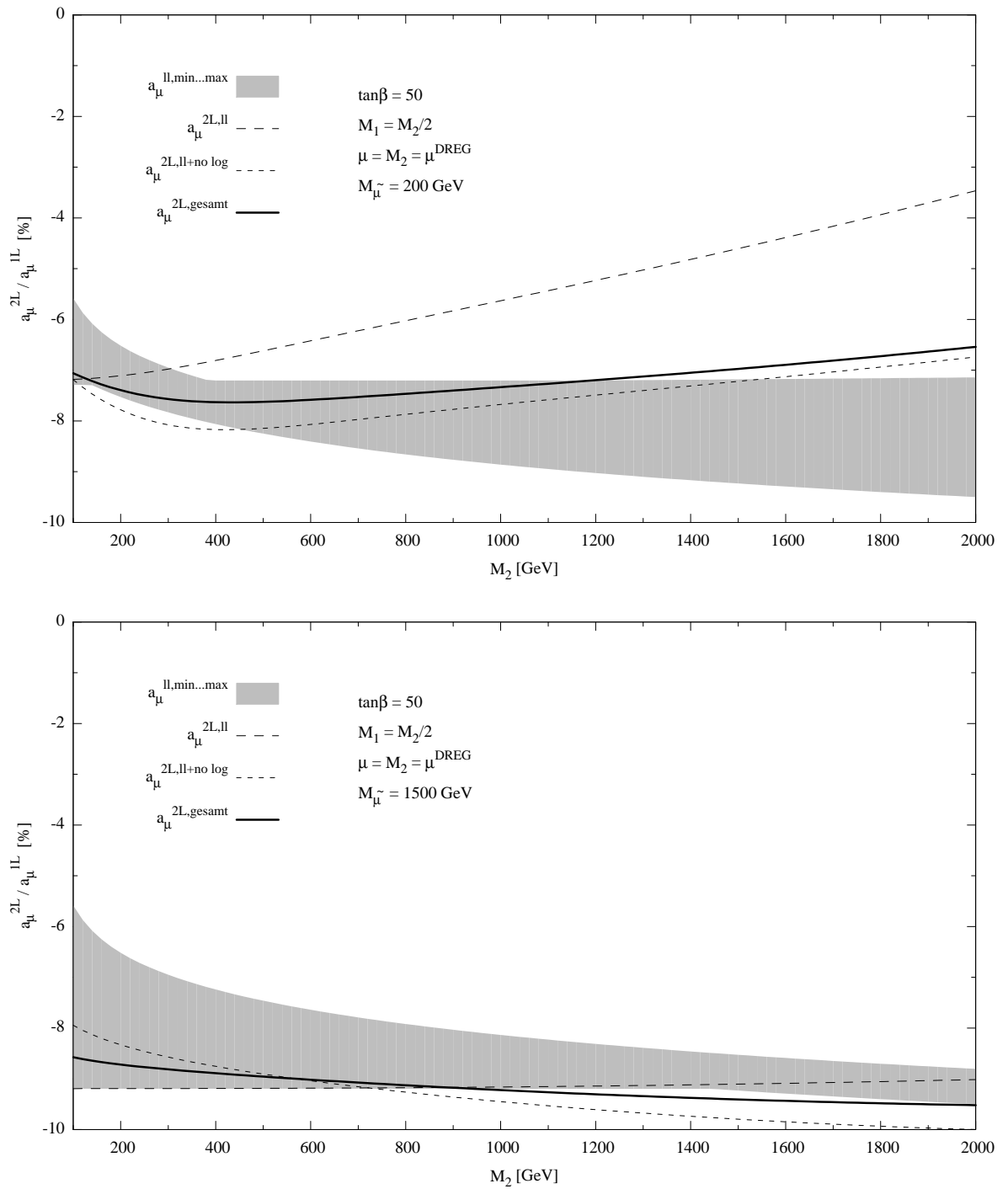
$$m_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}} \approx \max(m_{\chi_i^0}, m_{\chi_k^\pm}, m_{\tilde{\mu}_m}, m_{\tilde{\nu}}) \quad (\mu \lesssim M_2) \quad (5.72)$$

Für große  $\mu$  wird der Wertebereich von  $a_\mu^{\text{ll,min...max}}$  breiter und  $a_\mu^{\text{ll,max}}$  entfernt sich zunehmend vom genauen Wert der Zweischleifenbeiträge.

## Größe der nichtlogarithmischen Beiträge

Bei den bisherigen Betrachtungen dominierte der führende Logarithmus erwartungsgemäß das Zweischleifenergebnis. Es stellt sich die Frage, ob es Szenarien gibt, in denen das nicht der Fall ist, in denen also die nichtlogarithmischen Beiträge eine vergleichbare Größe erreichen. Letztere hängen im Wesentlichen von den  $F_{3,4}^{N,C}$  und damit vom Massenverhältnis  $x = m_{\chi^\pm}^2 / m_{\tilde{\nu}}^2$  bzw.  $x = m_{\chi^0}^2 / m_{\tilde{\mu}}^2$  ab. Im Rahmen der MSSM-Parameter bedeutet dies, dass das Verhältnis  $M_2 / M_{\tilde{\mu}}$  zu betrachten ist.

Abbildung 5.4 zeigt zwei Parameterszenarien:  $M_{\tilde{\mu}} = 200 \text{ GeV}$  und  $M_{\tilde{\mu}} = 1500 \text{ GeV}$ . Im ersteren Diagramm werden also große Werte, im zweiten kleine Werte für  $M_2 / M_{\tilde{\mu}}$  betrachtet. Es ist zu erkennen, dass im Falle von großen  $M_2 / M_{\tilde{\mu}}$  der führende Logarithmus unterdrückt wird und die nichtlogarithmischen Anteile verstärkt werden. Bei  $M_2 / M_{\tilde{\mu}} = 10$  sind beide



**Abbildung 5.4.:** Für zunehmend große  $M_2/M_{\tilde{\mu}}$  wächst der nichtlogarithmische Anteil an den Zweischleifenergebnissen, während der führende Logarithmus unterdrückt wird.

## 5. Ergebnisse

	$a_\mu^{1L}$	$a_\mu^{ll,\min}$	$a_\mu^{ll,\max}$	$a_\mu^{2L,ll}$	$a_\mu^{2L,\text{no log}}$	$a_\mu^{2L,L(m^2)}$	$a_\mu^{2L,\text{gesamt}}$	$a_\mu^{2L,\text{ges}}/a_\mu^{1L}$
SPS 1a	30.489	-1.998	-2.400	-2.096	-0.248	0.177	-2.167	-7.11%
SPS 1b	33.342	-2.350	-2.724	-2.502	-0.262	0.203	-2.561	-7.68%
SPS 2	1.707	-0.109	-0.156	-0.156	0.021	0.004	-0.131	-7.69%
SPS 3	14.133	-0.996	-1.158	-1.009	-0.126	0.079	-1.056	-7.47%
SPS 4	51.279	-3.464	-4.120	-4.090	-0.136	0.248	-3.979	-7.76%
SPS 5	8.973	-0.607	-0.753	-0.629	-0.063	0.034	-0.658	-7.33%
SPS 6	17.633	-1.270	-1.405	-1.285	-0.134	0.113	-1.305	-7.40%
SPS 7	24.652	-1.681	-1.941	-1.767	-0.243	0.205	-1.805	-7.32%
SPS 8	18.074	-1.246	-1.443	-1.373	-0.108	0.135	-1.346	-7.45%
SPS 9	-9.363	0.668	0.813	0.682	0.088	-0.066	0.704	-7.52%

**Tabelle 5.1.:** Numerische Auswertung der Ein- und Zweischleifenbeiträge für die SPS-Parameterpunkte. Alle Angaben von Beiträgen zu  $a_\mu$  sind mit  $10^{-10}$  zu multiplizieren.

Anteile ungefähr gleich groß.

### SPS-Bezugspunkte

Die *Snowmass Points and Slopes (SPS)* [A<sup>+</sup>02] bilden zehn gut motivierte und häufig betrachtete Parameterszenarien des MSSM. Die ermittelten Zweischleifenbeiträge wurden in jedem Szenario numerisch ausgewertet. Sie sind in Tabelle 5.1 aufgelistet ( $a_\mu^{2L,\text{gesamt}}$ ). Daneben enthält die Tabelle

- das Einschleifenergebnis  $a_\mu^{1L}$ ,
- eine Abschätzung des führenden Logarithmus auf Zweischleifenniveau  $a_\mu^{ll,\min\dots\max}$  (5.70),
- den eigentlichen Beitrag des führenden Logarithmus  $a_\mu^{2L,ll}$ ,
- die nichtlogarithmischen Anteile des Zweischleifenergebnisses  $a_\mu^{2L,\text{no log}}$  und
- die  $L(m_\nu^2)$ - bzw.  $L(m_\mu^2)$ -Beiträge  $a_\mu^{2L,L(m^2)}$ .

Es gilt

$$a_{2L}^{\chi^\pm} + a_{2L}^{\chi^0} = a_\mu^{2L,\text{gesamt}} = a_\mu^{2L,ll} + a_\mu^{2L,\text{no log}} + a_\mu^{2L,L(m^2)}. \quad (5.73)$$

Für den in  $L(m^2)$  auftretenden Skalenparameter der Dimensionalen Regularisierung  $\mu^{\text{DREG}}$  wurde die jeweilige  $\overline{\text{DR}}$ -Skala der SPS-Punkte gewählt.

Wie bei den vorangegangenen Graphen auch wurde  $\alpha_{\text{QED}} = 1/132,394$  verwendet. Dieser Wert entspricht einer Parametrisierung der Einschleifenergebnisse mit der Myonzerfallskon-

stante  $G_\mu$ , so dass  $\pi\alpha/\sin^2\theta_W \rightarrow \sqrt{2}G_\mu M_W^2$  (vgl. [HSW04a]). Dadurch werden weitere Zweischleifenbeiträge absorbiert, die allerdings andere Sektoren des MSSM betreffen.



## 6. Zusammenfassung

Das anomale magnetische Moment des Myon  $a_\mu$  ist eine der am präzisesten gemessenen Observablen der Teilchenphysik. Die Diskrepanz von mehr als drei Standardabweichungen zwischen der genauesten Messung und der Vorhersage des Standardmodells wird als Hinweis auf neue Physik gewertet. Eine vielversprechende Theorie für Physik jenseits des Standardmodells ist die Supersymmetrie. Die beobachteten Abweichungen könnten nämlich im Rahmen der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells, dem MSSM, erklärt werden. Die präzise Vorhersage der MSSM-Beiträge zu  $a_\mu$  kann daher helfen, die Frage zu beantworten, ob und unter welchen Bedingungen das MSSM eine adäquate Erweiterung des Standardmodells darstellt.

Die supersymmetrischen Beiträge auf Einschleifenniveau sind bereits bekannt. In dieser Arbeit wurden photonische Zweischleifenbeiträge im MSSM untersucht, d.h. alle Zweischleifendiagramme mit Photon-Schleife und Chargino-Sneutrino- bzw. Neutralino-Smyon-Schleife. Die Struktur dieser Diagramme erlaubt die Behandlung in einem vereinfachten Modell, das auf der QED fußt und nur jeweils ein Neutralino, Chargino, Sneutrino und Smyon besitzt. Im Rahmen dieses Modells wurden die Zweischleifenbeiträge analytisch ermittelt.

Für die Renormierung wurden Chargino- und Smyonmassen on-shell betrachtet. Bei einer Einbettung der Ergebnisse in die vollständige MSSM-Zweischleifenrechnung ist hier zu beachten, dass eine On-Shell-Bedingung nicht für beide Smyonmassen gestellt werden kann. Die Renormierung der  $\chi^\pm \tilde{\nu}_\mu$ - und  $\chi^0 \tilde{\mu}_\mu$ -Kopplungen betrifft neben den betrachteten Beiträgen auch andere Sektoren des MSSM. Daher wurde im Rahmen des vereinfachten Modells ein  $\overline{\text{MS}}$ -ähnliches Schema verwendet, das lediglich die Brechung der chiralen Symmetrie wie im MSSM erhält und die großen QED-Logarithmen berücksichtigt. Bei der Einbettung in das vollständige MSSM treten deswegen auch hier Korrekturen durch die Counterterme der anderen Sektoren sowie eventuelle Supersymmetrie erhaltende Counterterme in Dimensionaler Regularisierung auf.

Die Ergebnisse der Zweischleifenrechnung reproduzieren die schon bekannten führenden QED-Logarithmen, deren genaue Form für die MSSM-Beiträge nun identifiziert werden konnte. Sie dominieren erwartungsgemäß die betrachteten Zweischleifenkorrekturen und machen  $-(7 \dots 9)\%$  des Einschleifenergebnisses aus. Weiterhin sind die nichtlogarithmischen Beiträge ermittelt worden. Sie machen in der Regel nicht mehr als ein weiteres Prozent der

Einschleifenbeiträge aus und erlangen nur in ungewöhnlichen Parameterszenarien, in denen die Sleptonmassen um den Faktor 10 kleiner als die der Charginos und Neutralinos sind, eine mit den Logarithmen vergleichbare Größe. Für die zehn SPS-Bezugspunkte ist die Größe der Korrektur, die die gesamten berechneten Zweischleifenbeiträge an den Einschleifenbeiträgen ausmachen, ungefähr gleich groß und beläuft sich auf ca.  $-7,5\%$ . Insgesamt erlaubt die genaue Ermittlung der Zweischleifenbeiträge eine Reduktion der Ungenauigkeit der bislang notwendigen Abschätzung durch den führenden Logarithmus.

# A. Konventionen und Bezeichnungen

Der Autor dieser Arbeit hat sich darum bemüht, dass die Bedeutung der meisten Konventionen und Bezeichnungen aus dem Text selber hervorgeht. Für die wenigen Ausnahmen soll die Definition an dieser Stelle nachgeholt werden.

## A.1. Notation

Es wird die folgende Minkowskimetrik benutzt,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.1})$$

so dass die On-Shell-Massenbedingung  $p^2 = m^2$  lautet.

Für die Koordinaten des Superraumes werden neben den Koordinaten des Minkowskiraumes die Grassmannzahlen benötigt. Im Gegensatz zu den reellen oder komplexen Zahlen antikommutieren diese:

$$\{\theta, \theta\} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Für den Umgang mit Grassmannzahlen, Weylspinoren und dem Supersymmetrieoperator  $Q$  wird die van-der-Waerden-Notation verwendet. Dabei ist  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  der antisymmetrische Einheits-tensor:

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta \quad \text{bzw.} \quad \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi^{\dot{\beta}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}} \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

Ableitungen nach Grassmannzahlen ergeben sich aus der folgenden Definition:

$$\partial^\alpha \theta_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.7})$$

Integrale über Grassmannzahlen treten in supersymmetrischen Lagrangedichten auf. Sie wer-

den folgendermaßen definiert:

$$\int d^2\theta (a + b^\alpha\theta_\alpha + c\theta\theta) := c \quad (\text{A.8})$$

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}(a + \dots + d\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) := d \quad (\text{A.9})$$

Das Differenzial  $d^2\theta d^2\bar{\theta}$  wird abkürzend auch  $d^4\theta$  geschrieben.

Mit den Paulimatrizen  $\sigma^k$  wird definiert:

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = (1, \sigma^k)_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} = (1, -\sigma^k)^{\alpha\dot{\alpha}} \quad (\text{A.11})$$

Für die Diracspinoren werden die Chiralitätsprojektoren benötigt:

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5) \quad (\text{A.12})$$

Zur besseren Unterscheidung, über welche Indizes eine Spur gebildet wird, werden zwei unterschiedliche Notation verwendet:

$$\text{tr} = \text{Spur über Eichgruppenindizes} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr} = \text{Spur über Diracindizes} \quad (\text{A.14})$$

Die Normierung der Eichgruppengeneratoren  $T^a$  und  $I^a$  wird so gewählt, dass gilt

$$\text{tr} T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (\text{A.15})$$

## A.2. Kopplungen

Die Schreibweise der Kopplungen  $n_{L,R}$  und  $c_{L,R}$  im vereinfachten Modell (4.3) ist so gewählt, dass sie den Definitionen (3.18 - 3.21) entsprechen. Dies lässt sich aus der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$  (2.26) nachvollziehen. Die relevanten Teile lauten ( $L$  und  $E$  bezeichnen hier die Myonsuperfelder):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SUSY}} = & \int d^4\theta \left( L^\dagger e^{2gI^a V^a + g'YV'} L + E^\dagger e^{2gI^a V^a + g'YV'} E + \dots \right) \\ & + \left[ \int d^2\theta \left( y_\mu H_d L E + \dots \right) + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Diese Superfeldausdrücke lassen sich wie folgt in den Komponenten der Superfelder aus-

drücken. Das chirale Superfeld  $\Phi$  habe dabei die Komponenten  $A, \psi, F$  (vgl. 2.13), das Vektorsuperfeld  $F$  habe die Komponenten  $v_\mu, \lambda, \bar{\lambda}, D$  (vgl. 2.17):

$$\int d^4\theta \Phi e^{2gV} \Phi = \mathcal{L}_{\text{kin}, A, \psi} + F^\dagger F + gA^\dagger DA - \sqrt{2}(i\bar{\psi}\lambda A - iA^\dagger\lambda\psi) \quad (\text{A.17})$$

$$\int d^2\theta \Phi_1\Phi_2\Phi_3 = F_1A_2A_3 + A_1F_2A_3 + A_1A_2F_3 - (\psi_1\psi_2A_3 + \psi_2\psi_3A_1 + \psi_3\psi_1A_2) \quad (\text{A.18})$$

$F$  und  $D$  sind Hilfsfelder, die eliminiert werden können. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SUSY}, \chi^0} = & -\sqrt{2}g \left( \frac{-1}{2} \right) \left( \bar{\mu}_L(i\bar{\lambda}^3)\tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_L^\dagger(-i\tilde{\lambda}^3)\mu_L \right) \\ & -\sqrt{2}g' \left( \frac{-1}{2} \right) \left( \bar{\mu}_L(i\bar{\lambda}')\tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_L^\dagger(-i\tilde{\lambda}')\mu_L \right) \\ & -\sqrt{2}g' \cdot 1 \cdot \left( \bar{\mu}_R(i\bar{\lambda}')\tilde{\mu}_R^\dagger + \tilde{\mu}_R(-i\tilde{\lambda}')\mu_R \right) \\ & -y_\mu \left( \tilde{h}_d^0\mu_L\tilde{\mu}_R^\dagger + \mu_R\tilde{h}_d^0\tilde{\mu}_L + \text{h.c.} \right) \\ & + \text{weitere Terme} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Diese Terme lassen sich nun durch den Diracspinor

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_L \\ \bar{\mu}_R \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

und die Majoranaspinoren  $\lambda', \lambda^3, h_d^0$  (2.52) bzw. deren Masseneigenzustände ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SUSY}, \chi^0} = & \bar{\mu} \left[ P_R \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(g\lambda^3 + g'\lambda')\tilde{\mu}_L - y_\mu h_d^0\tilde{\mu}_R \right) \right. \\ & \left. - P_L \left( \sqrt{2}g'\lambda'\tilde{\mu}_R + y_\mu h_d^0\tilde{\mu}_L \right) \right] + \text{h.c.} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} = & \bar{\mu} \left[ P_R \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(gZ_{i2} + g'Z_{i1})W_{m1}^* - y_\mu Z_{i3}W_{m2}^* \right) \right. \\ & \left. - P_L \left( \sqrt{2}g'Z_{i1}^*W_{m2} + y_\mu Z_{i3}^*W_{m1} \right) \right] \chi_i^0\tilde{\mu}_m + \text{h.c.} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$= \bar{\mu} \left[ P_R n_L - P_L n_R^* \right] \chi_i^0\tilde{\mu}_m + \text{h.c.} + \dots \quad (\text{A.23})$$

Man erhält den Neutralinoanteil von (4.3). Die gleiche Prozedur führt auch auf den Charginoanteil, soll aber hier nicht näher ausgeführt werden.

### A.3. Standardintegrale

Bei der Integralreduktion und der Large Mass Expansion werden die in den Zweischleifenbeiträgen auftretenden Integrale auf folgende Standardintegrale zurückgeführt:

$$A_0(m) = \int \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (\text{A.24})$$

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{1}{[k^2 - m_1^2][(k+p)^2 - m_2^2]} \quad (\text{A.25})$$

$$T_{134}(m_1, m_3, m_4) = \int \int \frac{1}{[k_1^2 - m_1^2][(k_2 - k_1)^2 - m_3^2][k_2^2 - m_4^2]} \quad (\text{A.26})$$

mit

$$\int \rightarrow \frac{16\pi}{i} \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \quad (\text{A.27})$$

Für die Berechnung der On-Shell-Feldrenormierung wird die Ableitung der  $B_0$ -Funktion benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^2} B_0(p^2, m, M) = \frac{-1}{2p^2} & \left( B_0(p^2, m, M) - B_0(0, M, M) \right. \\ & \left. + (p^2 + M^2 - m^2) T_{122}^{\text{1L}}(p^2, m, M, M) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

wobei

$$T_{122}^{\text{1L}}(p^2, m_1, m_2, m_3) = \int \frac{1}{[k^2 - m_1^2][(k-p)^2 - m_2^2][(k-p)^2 - m_3^2]} \quad (\text{A.29})$$

In den Ergebnissen der Integralfunktionen tritt die folgende Funktion auf:

$$L(m^2) = \log \frac{m^2}{\mu^2} + \gamma_E - \log 4\pi \quad (\text{A.30})$$

$\gamma_E$  bezeichnet die *Euler-Mascheroni-Konstante*. Es gilt offensichtlich:

$$L(m^2) - L(M^2) = \log \frac{m^2}{M^2} \quad (\text{A.31})$$

## B. Modelldefinition in FeynArts

Das vereinfachte Modell aus Kapitel 4 wurde für das Programmpaket *FeynArts* in *Mathematica* definiert. Eine solche Modelldefinition gliedert sich stets in zwei Teile: Teilcheninhalt und Kopplungen.

Zunächst wird die Definition des Teilcheninhalts angegeben. Der Leptonsektor und das Photon wurden der Standardmodelldefinition entnommen. Dazu wurde je ein Chargino und Neutralino sowie Smyon und Sneutrino definiert:

```
1 IndexRange[ Index[Generation] ] = {1, 2, 3}
2 IndexStyle[ Index[Generation, i_Integer] ] := Alph[i + 8]
3
4 ViolatesQ[ q__ ] := Plus[q] != 0
5
6 M$ClassesDescription = {
7
8   (* Leptons (e, mu, tau) *)
9
10      (* The nomenclature has been kept compatible with SM.mod even
11         though the indices are unnecessary. Note that in QED.mod the
12         leptons live in class 1 (F[1]). *)
13 F[2] == {
14   SelfConjugate -> False,
15   Indices -> {Index[Generation]},
16   Mass -> MLE,
17   QuantumNumbers -> -Charge,
18   PropagatorLabel -> ComposedChar["e", Index[Generation]],
19   PropagatorType -> Straight,
20   PropagatorArrow -> Forward },
21
22   (* Photon *)
23 V[1] == {
24   SelfConjugate -> True,
25   Mass -> 0,
26   PropagatorLabel -> "\\gamma",
27   PropagatorType -> Sine,
28   PropagatorArrow -> None },
29
30
31   (* Extra particles: Two fermions (neutralino, chargino) and two
32      scalars (sleptons and sneutrinos): *)
33
34   (* Neutralino *)
35 F[11] == {
36   SelfConjugate -> True,
```

## B. Modelldefinition in FeynArts

---

```

37     Mass -> MNeu,
38     PropagatorLabel -> ComposedChar["\\chi", Null, "0", "\\tilde"],
39     PropagatorType -> Straight,
40     PropagatorArrow -> None },
41
42     (* Chargino *)
43 F[12] == {
44     SelfConjugate -> False,
45     Mass -> MCha,
46     PropagatorLabel -> ComposedChar["\\chi", Null, Null, "\\tilde"],
47     PropagatorType -> Straight,
48     PropagatorArrow -> Forward },
49
50     (* Sneutrino: Q = 0 *)
51 S[11] == {
52     SelfConjugate -> False,
53     Mass -> MSneu,
54     PropagatorLabel -> ComposedChar["\\nu", Null, Null, "\\tilde"],
55     PropagatorType -> ScalarDash,
56     PropagatorArrow -> Forward },
57
58     (* Smuon: Q = -1 *)
59 S[12] == {
60     SelfConjugate -> False,
61     Mass -> MSmuon,
62     PropagatorLabel -> ComposedChar["\\mu", Null, Null, "\\tilde"],
63     PropagatorType -> ScalarDash,
64     PropagatorArrow -> Forward }
65 }
66
67
68 MLE[1] = ME;
69 MLE[2] = MM;
70 MLE[3] = ML;
71
72 TheLabel[ F[2, {1}] ] = "e";
73 TheLabel[ F[2, {2}] ] = "\\mu";
74 TheLabel[ F[2, {3}] ] = "\\tau"
75
76 GaugeXi[ V[1] ] = GaugeXi[A]

```

Der zweite Teil der Modelldefinition beinhaltet die Kopplungen inklusive Renormierungskonstanten. Die Nomenklatur orientiert sich dabei an den Definitionen von Standardmodell und MSSM in *FeynArts*.

$dZ_{fL1}$  und  $dZ_{fR1}$  bezeichnen die Feldrenormierungskonstanten des Myon  $\delta Z_{L,R}$ .  $dMf1[i]$  steht für die Massenrenormierungskonstanten der Fermionen,  $dMS_{neusq1}$  und  $dMS_{lepsq1}$  für die von Sneutrino und Smyon. Die QED-Renormierungskonstanten  $dZ_e1$  und  $dZ_{AA1}$  sind ebenfalls explizit aufgeführt, allerdings ist die Ward-Identität  $\delta Z_e = -\frac{1}{2}\delta Z_A$  fest in der Modelldefinition verdrahtet.

---

```

77 (* Avoid using Re[] below because Mathematica doesn't know how to deal with
78 it when differentiating. It's better to spell it out using Conjugate[] then. *)
79 RE[num_] := (num + Conjugate[num])/2
80
81 (* hardcode QED Ward identity *)
82 dZel = -dZAA1/2
83
84 mdZfLR1 := Mass[F[2, {2}]]/2 * (dZfL1 + Conjugate[dZfR1]);
85 mdZfRL1 := Mass[F[2, {2}]]/2 * (dZfR1 + Conjugate[dZfL1]);
86
87
88 M$CouplingMatrices = {
89
90     (* Lepton propagator: mass and field renormalization *)
91
92     C[ -F[2, {j1}], F[2, {j2}] ] == I IndexDelta[j1, j2] *
93     (* The negative sign in the first row seems to be a FeynArts convention *)
94     { {0, -RE[dZfL1]},
95       {0, RE[dZfR1]},
96       {0, -mdZfLR1 - dMf1[2]},
97       {0, -mdZfRL1 - dMf1[2]} },
98
99     (* Neutralino, chargino propagators: mass renormalization *)
100
101     C[ F[11], F[11] ] == I *
102     { {0, 0},
103       {0, 0},
104       {0, -dMf1[11]},
105       {0, -dMf1[11]} },
106
107     C[ -F[12], F[12] ] == I *
108     { {0, 0},
109       {0, 0},
110       {0, -dMf1[12]},
111       {0, -dMf1[12]} },
112
113     (* Slepton and sneutrino propagators: mass renormalization *)
114
115     C[ -S[11], S[11] ] == I *
116     { {0, 0},
117       {0, -dMSneusq1} },
118
119     C[ -S[12], S[12] ] == I *
120     { {0, 0},
121       {0, -dMSlepsq1} },
122
123     (* Photon: field renormalization *)
124
125     C[ V[1], V[1] ] == I *
126     { {0, dZAA1, dZAA2},
127       {0, 0, 0},
128       {0, -dZAA1, -dZAA2} },
129
130     (* QED vertices: l-V-l, cha-V-cha *)
131
132     C[ -F[2, {j1}], F[2, {j2}], V[1] ] == I EL IndexDelta[j1, j2] *

```

## B. Modelldefinition in FeynArts

---

```
133     { {1, dZel + dZAA1/2 + RE[dZfL1]},
134       {1, dZel + dZAA1/2 + RE[dZfR1]} },
135
136 C[-F[12], F[12], V[1]] == I EL *
137   { {1, dZel + dZAA1/2},
138     {1, dZel + dZAA1/2} },
139
140   (* Smuon-Photon coupling *)
141
142 C[S[12], -S[12], V[1]] == I EL *
143   { {1, dZel + dZAA1/2} },
144
145 C[S[12], -S[12], V[1], V[1]] == 2 I EL^2 *
146   { {1, 2*(dZel + dZAA1/2)} },
147
148   (* Undetermined coupling vertices: l-neu-sl, l-cha-sneu *)
149
150 C[-F[2, {a1}], F[11], S[12]] == I *
151   { {-Conjugate[NR], -Conjugate[dNR] - Conjugate[NR]*Conjugate[dZfR1]/2},
152     {NL, dNL + NL*Conjugate[dZfL1]/2} },
153
154 C[F[2, {a1}], F[11], -S[12]] == I *
155   { {Conjugate[NL], Conjugate[dNL] + Conjugate[NL] * dZfL1 / 2},
156     {-NR, -dNR - NR*dZfR1 / 2} },
157
158 C[-F[2, {a1}], F[12], S[11]] == I *
159   { {Conjugate[CR], Conjugate[dCR] + Conjugate[CR]*Conjugate[dZfR1]/2},
160     {CL, dCL + CL*Conjugate[dZfL1]/2} },
161
162 C[F[2, {a1}], -F[12], -S[11]] == I *
163   { {Conjugate[CL], Conjugate[dCL] + Conjugate[CL] * dZfL1 / 2},
164     {CR, dCR + CR*dZfR1 / 2} }
165
166 }
167
168
169 M$LastModelRules = {}
```

# Literaturverzeichnis

- [A<sup>+</sup>02] B. C. Allanach et al. The Snowmass points and slopes: Benchmarks for SUSY searches. *Eur. Phys. J.*, C25:113–123, 2002.
- [A<sup>+</sup>08] C. Amsler et al. Review of particle physics. *Phys. Lett.*, B667:1, 2008.
- [Adl69] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [AHKN08] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio. Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, D77:053012, 2008.
- [Ash72] J. F. Ashmore. A Method of Gauge Invariant Regularization. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:289–290, 1972.
- [B<sup>+</sup>06] G. W. Bennett et al. Final report of the muon E821 anomalous magnetic moment measurement at BNL. *Phys. Rev.*, D73:072003, 2006.
- [BG72] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. *Nuovo Cim.*, B12:20–25, 1972.
- [BJ69] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$  model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.
- [BRS74] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. The Abelian Higgs-Kibble Model. Unitarity of the S Operator. *Phys. Lett.*, B52:344, 1974.
- [BRS75] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model. *Commun. Math. Phys.*, 42:127–162, 1975.
- [CK96] Andrzej Czarnecki and Bernd Krause. Electroweak corrections to the muon anomalous magnetic moment. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 51C:148–153, 1996.
- [CM67] Sidney R. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the S matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.

- [CM01] Andrzej Czarnecki and William J. Marciano. The muon anomalous magnetic moment: A harbinger for ‘new physics’. *Phys. Rev.*, D64:013014, 2001.
- [DG81] Savas Dimopoulos and Howard Georgi. Softly Broken Supersymmetry and  $SU(5)$ . *Nucl. Phys.*, B193:150, 1981.
- [DG98] G. Degrossi and G. F. Giudice. QED logarithms in the electroweak corrections to the muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev.*, D58:053007, 1998.
- [DR09] Eduardo De Rafael. Present Status of the Muon Anomalous Magnetic Moment. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 186:211–217, 2009.
- [EB64] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–322, 1964.
- [FLL<sup>+</sup>06] Tai-Fu Feng, Xue-Qian Li, Lin Lin, Jukka Maalampi, and He-Shan Song. The two-loop supersymmetric corrections to lepton anomalous magnetic and electric dipole moments. *Phys. Rev.*, D73:116001, 2006.
- [FP67] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett.*, B25:29–30, 1967.
- [FR74] S. Ferrara and E. Remiddi. Absence of the Anomalous Magnetic Moment in a Supersymmetric Abelian Gauge Theory. *Phys. Lett.*, B53:347, 1974.
- [FWZ74] S. Ferrara, J. Wess, and B. Zumino. Supergauge Multiplets and Superfields. *Phys. Lett.*, B51:239, 1974.
- [GDR69] M. Gourdin and E. De Rafael. Hadronic contributions to the muon  $g$ -factor. *Nucl. Phys.*, B10:667–674, 1969.
- [GG82] L. Girardello and Marcus T. Grisaru. Soft Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B194:65, 1982.
- [GHK64] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global conservation laws and massless particles. *Phys. Rev. Lett.*, 13:585–587, 1964.
- [Gla61] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [Hah01] Thomas Hahn. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Comput. Phys. Commun.*, 140:418–431, 2001.

- [Hig64] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [HLS75] Rudolf Haag, Jan T. Łopuszanski, and Martin Sohnius. All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix. *Nucl. Phys.*, B88:257, 1975.
- [HMNT07] Kaoru Hagiwara, A. D. Martin, Daisuke Nomura, and T. Teubner. Improved predictions for  $g - 2$  of the muon and  $\alpha_{\text{QED}}(M_Z^2)$ . *Phys. Lett.*, B649:173–179, 2007.
- [HR03] W. Hollik and H. Rzehak. The sfermion mass spectrum of the MSSM at the one-loop level. *Eur. Phys. J.*, C32:127–133, 2003.
- [HSW04a] S. Heinemeyer, D. Stöckinger, and G. Weiglein. Two-loop SUSY corrections to the anomalous magnetic moment of the muon. *Nucl. Phys.*, B690:62–80, 2004.
- [HSW04b] Sven Heinemeyer, Dominik Stöckinger, and Georg Weiglein. Electroweak and supersymmetric two-loop corrections to  $(g - 2)_\mu$ . *Nucl. Phys.*, B699:103–123, 2004.
- [JN09] Fred Jegerlehner and Andreas Nyffeler. The Muon  $g - 2$ . *arXiv*, 0902.3360, 2009.
- [KBD90] J. Küblbeck, M. Böhm, and Ansgar Denner. FeynArts: Computer algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes. *Comput. Phys. Commun.*, 60:165–180, 1990.
- [LR96] S. Laporta and E. Remiddi. The analytical value of the electron  $(g - 2)$  at order  $\alpha^3$  in QED. *Phys. Lett.*, B379:283–291, 1996.
- [Mor96] Takeo Moroi. The Muon Anomalous Magnetic Dipole Moment in the Minimal Supersymmetric Standard Model. *Phys. Rev.*, D53:6565–6575, 1996.
- [MW01] Stephen P. Martin and James D. Wells. Muon anomalous magnetic dipole moment in supersymmetric theories. *Phys. Rev.*, D64:035003, 2001.
- [RLR90] R. Z. Roskies, Michael J. Levine, and E. Remiddi. Analytic evaluation of sixth order contributions to the electron’s  $g$  factor. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 7:162–217, 1990.
- [Sal68] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. 1968. Originally printed in *Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden*, Stockholm 1968, 367-377.

- [Sch49] Julian S. Schwinger. Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: Radiative corrections to scattering. *Phys. Rev.*, 76:790–817, 1949.
- [Sie79] Warren Siegel. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction. *Phys. Lett.*, B84:193, 1979.
- [Smi95] Vladimir A. Smirnov. Asymptotic expansions in momenta and masses and calculation of Feynman diagrams. *Mod. Phys. Lett.*, A10:1485–1500, 1995.
- [Stö07] Dominik Stöckinger. The muon magnetic moment and supersymmetry. *J. Phys.*, G34:R45–R92, 2007.
- [tHV72] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys.*, B44:189–213, 1972.
- [Wei67] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [WSB94] G. Weiglein, R. Scharf, and M. Böhm. Reduction of general two loop selfenergies to standard scalar integrals. *Nucl. Phys.*, B416:606–644, 1994.
- [WZ74] J. Wess and B. Zumino. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations. *Phys. Lett.*, B49:52, 1974.

## **Danksagung**

Dominik Stöckinger legte mir die Physik jenseits des Standardmodells nahe und hatte die Idee zu dieser Arbeit. Nicht nur dafür, sondern auch für die intensive Betreuung während der Anfertigung und für unzählige lehrreiche Diskussionen möchte ich ihm herzlich danken.

Marco Schäfer, Matthias Geyer, Alexander Voigt, Robert Schnell und meinen Eltern danke ich dafür, dass sie Text und Formeln kritisch beäugt und wenn nötig Verbesserungsvorschläge angebracht haben.

Bei Kathrin Leonhardt, Alexej Volk, Marco Schäfer, Matthias Geyer und Alexander Voigt bedanke ich mich für viele nicht immer produktive aber dafür kurzweilige Arbeitstage im gemeinsamen Büro. Peter Athron, Hyejung Stöckinger-Kim, Marek Schönherr, Benjamin Janutta und viele andere Mitarbeiter am Institut für Kern- und Teilchenphysik waren immer zu einem Schwätzchen bereit und haben dadurch ebenfalls zu einer anregenden Arbeitsatmosphäre beigetragen.

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Philipp v. Weitershausen  
Dresden im April 2009